

## Classificação da curvatura de vertentes em perfil via Modelo Numérico de Terreno

Daniela Souza dos Anjos<sup>1,2</sup>  
Messias Meneguette Junior<sup>2</sup>  
João Osvaldo Rodrigues Nunes<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Universidade de Taubaté - UNITAU  
Av. Marechal Deodoro, 605 - Jardim Santa Clara, 12080-000, Taubaté – SP. Brasil  
daniela.anjos@unitau.com.br

<sup>2</sup> Faculdade de Ciências e Tecnologia – FCT/UNESP  
Rua Roberto Simonsen, 305, Jardim das Rosas, 19060-900, Presidente Prudente, S.P. Brasil  
{messias, joaosvaldo}@fct.unesp.br

**Abstract.** The representations of land, much used in mapping, can be performed in different ways, taking into account the objective that you want to achieve. Among the various applicability of these representations we can highlight the classification of the vertical curvature of the aspects that differentiate the dimensions of a particular ground between rectilinear, concave and convex from their representation contributes to the production of information relevant to decision-making in areas as agriculture, construction, real estate, study of microbasins among others. The existing algorithms able to classify these forms of relief have clear needs for improvement, because only classify areas already established. In order to better exploit this feature of relief was developed an implementation able to generate Numerical Models of Terrain (NTM) in any area that has planoaltimétricos data, using a mathematical tool Thin Plate Spline interpolation method as well as calculate the values of curvature in profile to all points of NTM, and classify them according to the limits obtained for each class via Fuzzy Inference presenting as a natural way not because of rigidity of such limits in nature.

**Palavras-chave:** NTM, Slope Curvate, Thin Plate Spline, Fuzzy Inference, Modelo Numérico de Terreno, Curvatura de Vertentes, Inferência *Fuzzy*.

### 1. Introdução

Dentre as várias representações utilizadas pela cartografia como mapas, cartas e representações digitais, uma de grande importância é a representação digital de uma superfície, que pode ser realizada de diferentes maneiras levando em consideração o objetivo que se deseja atingir.

Diversas áreas do conhecimento se interessam pela usabilidade do solo e pela resolução e prevenção de problemas gerados pelos diferentes tipos de feições geomorfológicas no sentido de se obter melhores resultados nesse uso, minimizando os impactos a ele associados (VELOSO, 2002).

Alguns tipos de feições geomorfológicas são consideradas unidades básicas do relevo e fundamentais para explicar o desenvolvimento das paisagens. As vertentes que são definidas como planos de declives que divergem a partir das cristas enquadrando o vale (GUERRA, 1993) também podem ser descritas, de maneira mais simples, como um elemento da superfície terrestre inclinado em relação à horizontal, que apresenta um gradiente e uma orientação no espaço (VELOSO, 2002), e dessa forma podem ser classificadas de acordo com a sua curvatura no plano ou em perfil.

A curvatura no plano é a taxa de variação da declividade na direção ortogonal à da orientação da vertente e refere-se ao caráter divergente/convergente do terreno, enquanto a curvatura no perfil é a taxa de variação da declividade na direção de sua orientação e está relacionada ao caráter convexo/côncavo do terreno sendo decisiva na aceleração ou desaceleração do fluxo da água sobre o mesmo.

A classificação das vertentes em relação ao perfil é analisada de acordo com seu valor de curvatura e teoricamente, vertentes retilíneas têm valor de curvatura nulo, vertentes côncavas os têm positivos e convexas têm curvatura negativa (VALERIANO, 2003). Porém, vertentes com valores nulos são muito raras na natureza, assim muito pouco do que se julga retilíneo apresenta valor de curvatura realmente nulo, mas sim valores pertencentes a um intervalo de tolerância na vizinhança desse valor.

A Figura 1 apresenta uma ilustração ideal das três classes de vertentes analisadas em perfil.

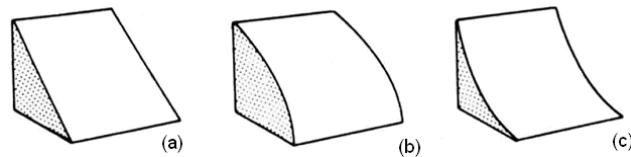


Figura 1– Tipos de vertentes em relação ao perfil  
(a) retilínea, (b) convexa, (c) côncava  
Fonte: Schmidt, Hewitt, 2004

Como a forma da superfície terrestre é essencial ao conhecimento dos processos que ocorrem em um terreno e influencia o fluxo d'água, o transporte de sedimentos e poluentes, a natureza e a distribuição de habitat de plantas e animais, além de ser uma expressão dos processos geológicos e do intemperismo (BLASZCZYNSKI, 1997), a falta de planejamento quanto ao uso e ocupação de feições como as vertentes, bem como o desconhecimento das características geomorfológicas e geológicas de uma área podem ocasionar problemas de infiltrações no solo, gerando erosões, deslizamentos ou quedas de barreiras (NUNES, 2005), dessa forma, para obter bons resultados no uso de vertentes é necessário que haja uma descrição cuidadosa da forma das mesmas para que seja possível estudar as implicações desse uso tanto a curto quanto a longo prazo.

Analizando esse cenário, as representações de superfície que tem por objetivo classificar previamente os tipos de vertentes apresentando suas diferentes curvaturas verticais se tornam um dado de grande importância em projetos que tem por intenção utilizar grandes áreas, como por exemplo, construção civil, agricultura, estabelecimento de aterro sanitário, entre outros.

Este artigo apresenta a arquitetura e as características da implementação, capaz de distinguir as vertentes de um terreno de maneira semi-automática, como produto derivado do Modelo Numérico de Terreno (MNT) da área, classificando-as com precisão próxima à obtida através do contato de um especialista, além de apresentar uma comparação entre os resultados obtidos pela implementação para áreas do município de Presidente Prudente – S.P. e o mapa geomorfológico do perímetro urbano de Presidente Prudente – SP na escala 1:25.000. Desenvolvida no Programa de Pós Graduação em Ciências Cartográficas da Universidade Estadual Paulista a implementação se mostra como uma perspectiva de grande interesse para o contexto descrito anteriormente.

## 2. Metodologia do Trabalho

No desenvolvimento de implementações que classifiquem formas do relevo a utilização de áreas de teste, classificadas previamente por especialistas, se faz necessária para que seja possível validar os resultados obtidos e calibrar os parâmetros utilizados. Por apresentar vertentes com diferentes características em relação a curvatura vertical, disponibilizar fotografias aéreas em escala de 1:25.000, uma base digital planoaltimétrica georreferenciada além de apresentar a possibilidade de visitas frequentes a área para coletas de dados caso necessário, o município de Presidente Prudente - SP teve três áreas de teste selecionadas, que serviram de base para o desenvolvimento da implementação capaz de classificar a curvatura de vertentes em perfil.

Para a seleção dessas áreas foram feitas análises estereoscópicas de fotografias aéreas do município de Presidente Prudente em uma escala 1:25.000 de um levantamento aerofotogramétrico de setembro de 1995 (vôo realizado pela empresa Base aerofotogrametria e projetos s/a) de modo a observar as características da região em terceira dimensão, o que possibilitou uma distinção preliminar entre áreas retilíneas, convexas e côncavas e a otimização do trabalho de campo no qual as três áreas de teste foram selecionadas.

A área de teste 1 é considerada uma vertente retilínea de acordo com a classificação visual de um especialista e se encontra na Zona Oeste do município, tem como fundo de vale o córrego São João e pertence a zona rural. Já as áreas de teste 2 e 3, que são classificadas visualmente como

vertentes côncava e convexa respectivamente, estão localizadas na Zona Leste próximo a uma área residencial do bairro Vila Operária.

Após a seleção dessas áreas, os dados topográficos (latitude, longitude e altimetria) foram coletados através da base digital planoaltimétrica georeferenciada do município de Presidente Prudente, com escala 1:10.000 que contém dados de todos os pontos pertencentes as curvas de nível do município com espaçamento de 10 metros. Essa coleta foi realizada com o auxílio do software MicroStation V8 e os dados foram armazenados em arquivos de texto passíveis de importação para o ambiente Delphi no qual o programa de classificação de vertentes em perfil foi desenvolvido.

O fato da aquisição dos valores de latitude e longitude se dar via curva de nível caracteriza os dados coletados como semi-regulares, o que obriga o uso de um método de adensamento de dados (interpolação) para a geração de um Modelo Numérico de Terreno com grade regular retangular. Dentre os diversos métodos de interpolação existentes, o *Thin Plate Spline* (TPS) foi escolhido para esse estudo devido sua característica de apresentar superfícies suaves, evitando o uso posterior de um método de suavização.

A função radial  $g(r)$  base do conceito TPS é dada pela Equação 1 (COSTA e CESAR, 2001):

$$g(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r = 0 \\ r^2 \ln r^2 & \text{se } r \neq 0 \end{cases} \quad (1)$$

na qual  $r$  é um valor real não negativo dado pela diferença (distância) entre as coordenadas do ponto onde a função é avaliada e as coordenadas dos pontos de referência. Assim, embora sejam funções globais, as influências de deformações locais tendem a diminuir a medida que se afastem do ponto analisado.

O método TPS consiste na combinação linear de múltiplos termos  $g(r)$  e é descrito através da função bivariada  $z(x,y)$  da Equação 2 (BOOKSTEIN, 1989):

$$z(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + \sum_{i=1}^n F_i r_i^2 \ln r_i^2 \quad (2)$$

com  $z_k = z(x_k, y_k)$  para  $k = 1, 2, \dots, n$ ;  $r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$   
e  $F_i, a_0, a_1$  e  $a_2$  sendo os  $n+3$  coeficientes.

De acordo com o grau de curvatura da superfície analisada o termo  $r^2 \ln r^2$  pode ser substituído por  $r^2 \ln(r^2 + \varepsilon)$ , com o parâmetro  $\varepsilon$  sendo usualmente tomado no intervalo  $[10^{-4}, 10^{-2}]$ , buscando gerar uma superfície que se ajuste aos  $n$  pontos. obtendo assim a Equação 3:

$$z(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + \sum_{i=1}^n F_i r_i^2 (\ln r_i^2 + \varepsilon) \quad (3)$$

O parâmetro adotado nesse trabalho foi  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

Devido ao grande número de pontos coletados para as áreas analisadas e a possibilidade de acesso a diversos arquivos de dados, o método de interpolação TPS foi implementado em ambiente Delphi na sua forma matricial (Equação 4), tornando a geração dos MNTs menos caras para o programa de classificação de vertentes em perfil.

$$AX = B \quad (4)$$

Com

$$X' = (F_1 \quad F_2 \quad \dots \quad F_n \quad a_0 \quad a_1 \quad a_2)$$

$$B' = (z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_n \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & r_{12}^2 \ln(r_{12}^2 + \varepsilon) & \dots & r_{1n}^2 \ln(r_{1n}^2 + \varepsilon) & 1 & x_1 & y_1 \\ r_{12}^2 \ln(r_{12}^2 + \varepsilon) & 0 & \dots & r_{2n}^2 \ln(r_{2n}^2 + \varepsilon) & 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{1n}^2 \ln(r_{1n}^2 + \varepsilon) & r_{2n}^2 \ln(r_{2n}^2 + \varepsilon) & \dots & 0 & 1 & x_n & y_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim, a matriz A que é simétrica e inversível, apesar dos elementos da diagonal principal serem nulos, pode ser utilizada para resolver o sistema e determinar os coeficientes, obtendo conseqüentemente o valor interpolado em qualquer ponto (x,y).

Após serem utilizados para a geração do Modelo Numérico de Terreno, esses valores interpolados são armazenados pelo programa, pois são de fundamental importância no cálculo do valor da curvatura de vertentes em perfil  $C_{pe}$ .

O valor  $C_{pe}$  é dado por uma relação entre as derivadas de primeira e segunda ordem da variável altitude e é calculado para cada elemento (x,y) de acordo com os valores  $z_{i,j}$  de seus vizinhos como mostra a Figura 2.

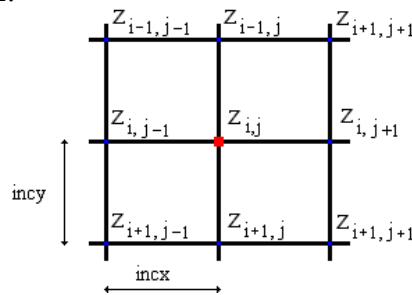


Figura 2 – Célula sobre a qual a curvatura em perfil é calculada para o ponto  $z_{i,j}$ .

A relação  $C_{pe}$  que expressa o valor da curvatura para cada ponto  $z_{i,j}$  é dada por (MENDES, 1998):

$$C_{pe} = \frac{2 \cdot D \cdot G^2 + 2 \cdot E \cdot H^2 + 2 \cdot F \cdot G \cdot H}{(G^2 + H^2)} \tag{5}$$

com

$$D = \frac{\delta^2 Z}{2 \cdot \delta x^2}; E = \frac{\delta^2 Z}{2 \cdot \delta y^2}; F = \frac{\delta^2 Z}{\delta y \delta x}; G = \frac{\delta Z}{\delta x}; H = \frac{\delta Z}{\delta y}$$

e

$$\frac{\delta Z}{\delta x} = \frac{z_{i,j+1} - z_{i,j-1}}{2 \cdot incx}, \quad \frac{\delta Z}{\delta y} = \frac{z_{i-1,j} - z_{i+1,j}}{2 \cdot incy}, \quad \frac{\delta^2 Z}{\delta x^2} = \frac{z_{i,j+1} - 2z_{i,j} + z_{i,j-1}}{incx^2},$$

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta y^2} = \frac{z_{i-1,j} - 2z_{i,j} + z_{i+1,j}}{incy^2}, \quad \frac{\delta^2 Z}{\delta x \delta y} = \frac{z_{i-1,j+1} - z_{i-1,j-1} - z_{i+1,j+1} + z_{i+1,j-1}}{4 \cdot incx \cdot incy}$$

Através dessa relação cada ponto (x,y) passa a possuir além de um valor  $z_{i,j}$  referente a altitude, um valor  $C_{pe}$  referente a curvatura em perfil que permite a classificação do MNT de acordo

com essa característica, considerando que vertentes retilíneas possuem valor  $C_{pe}$  nulo, côncavas valor  $C_{pe}$  positivo e convexas valor  $C_{pe}$  negativo.

Porém é difícil definir um limite rígido entre características naturais, como é o caso da classes de vertentes, dessa forma outros testes foram realizados para calibrar os parâmetros e definir a melhor faixa a ser considerada retilínea e as áreas limites entre uma classe e outra. Assim as vertentes passaram a ser classificadas não mais entre as três classes côncava, convexa e retilínea, mas sim em cinco classes distintas:

Convexa: Área de certeza na qual os valores de curvatura são negativos.

Convexa-retilínea: Área de incerteza na qual os valores são negativos e próximos de zero, mas não se encontram certamente na faixa considerada retilínea.

Retilínea: Área na qual os valores estão certamente contidos na faixa considerada retilínea.

Retilínea-côncava: Área de incerteza na qual os valores são positivos e próximos de zero, mas não se encontram certamente na faixa considerada retilínea.

Côncava: Área de certeza na qual os valores de curvatura são positivos.

A ferramenta matemática Inferência *Fuzzy* se apresenta como o caminho natural para a determinação desses limites, pois é uma ferramenta que objetiva modelar, de modo aproximado, o raciocínio humano na presença de incerteza e imprecisão fornecendo resposta aproximada baseada em conhecimento inexato. Assim, sua utilização é indicada sempre que se tiver que lidar com ambigüidade, abstração ou ambivalência em modelos matemáticos.

Zadeh (1965) definiu a lógica *fuzzy* como uma lógica matemática dedicada ao raciocínio incerto ou aproximado, na qual um conjunto *fuzzy* é uma forma de caracterizar classes que por diversas razões não possuem limites rígidos entre si, tendo como motivação a rápida diminuição da qualidade da informação fornecida por modelos matemáticos tradicionais, conforme o aumento da complexidade do sistema, ao perceber que essa complexidade advinha do modo como as variáveis eram representadas e manipuladas, pois desde que essas variáveis possam apenas representar o estado do fenômeno como existindo ou não existindo, a matemática necessária para avaliá-lo torna-se muito complexa (KLIR; YUAN, 1996).

Matematicamente a ferramenta Inferência *Fuzzy* é descrita como sendo:

$$A = (x, \mu_A(x)) \text{ para todo, } x \in U \quad (6)$$

onde,  $U$  denota um espaço definido de  $n$  objetos, e o conjunto nebuloso  $A$  em  $U$ ;  $\mu_A(x)$  é a função de pertinência conhecida como grade de associação de  $x$  em  $A$ , isto é, uma graduação mapeável do membro  $x$  em  $A$ , que associe cada ponto de  $U$  a um número real no intervalo  $[0,1]$  (ZADEH, 1965).

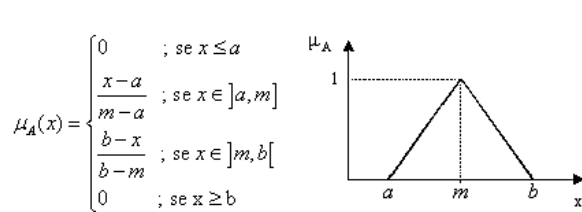
Nessa associação, o valor 1 representa o enquadramento perfeito ao conjunto difuso e 0 corresponde ao membro que não pertence ao conjunto, por conseguinte, os valores entre 0 e 1 representam um enquadramento ao conjunto, porém esse enquadramento não é totalmente perfeito. O valor da função de pertinência  $\mu_A(x)$  de um objeto  $x$  em  $A$  significa dizer o grau de compatibilidade de um parâmetro (variável) relacionado ao conjunto  $A$  e ao objeto  $x$ , ou seja,  $\mu_A(x)$  avalia o quanto  $x$  pode pertencer ao conjunto  $A$ .

Para que essa relação seja estabelecida é necessário que haja uma função de pertinência relacionando os conjuntos. Esta função é o componente crucial de um conjunto *fuzzy* e muitas operações são definidas em conformidade com a mesma (ZADEH, 1965).

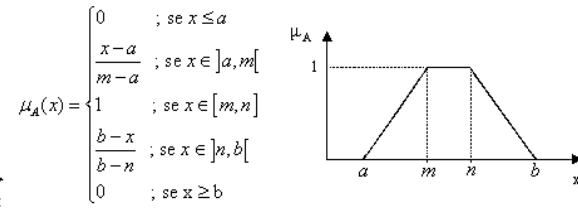
Como qualquer função da forma  $\mu_A : U \rightarrow [0,1]$  pode ser associada a um conjunto *fuzzy*, a literatura já dispõe de famílias de funções de pertinência que são geralmente utilizadas, como as funções triangulares, trapezoidais, sigmoidais e gaussianas (PEDRICZ; GOMIDE, 1998).

Devido ao caráter linear, a facilidade de implementação e a definição de parâmetros de maneira intuitiva foram utilizadas no trabalho apenas funções de pertinência triangulares e trapezoidais definidas como:

### Função de Pertinência Triangular



### Função de Pertinência Trapezoidal



A utilização dessas funções de pertinência no Sistema de Inferência Fuzzy disponível em ambiente Matlab juntamente com a definição intuitiva dos parâmetros necessários pode definir os novos limites para as classes e possibilitar a classificação dos terrenos analisados.

Como resultado final a implementação apresenta o MNT como um mapa temático que utiliza a variável visual cor matiz como forma de distinção entre as classes.

### 3. Resultados e Discussão

A Figura 3 apresenta o mapa geomorfológico de uma área de estudo, chamada de Área A, localizada no município de Presidente Prudente – S.P, no qual as vertentes são classificadas de acordo com a curvatura em perfil por meio de setas que definem tendências côncavas, convexas ou retilíneas para cada uma delas. Por outro lado a Figura 4 apresenta a mesma área classificada de acordo com o valor de curvatura obtido para cada ponto do modelo.

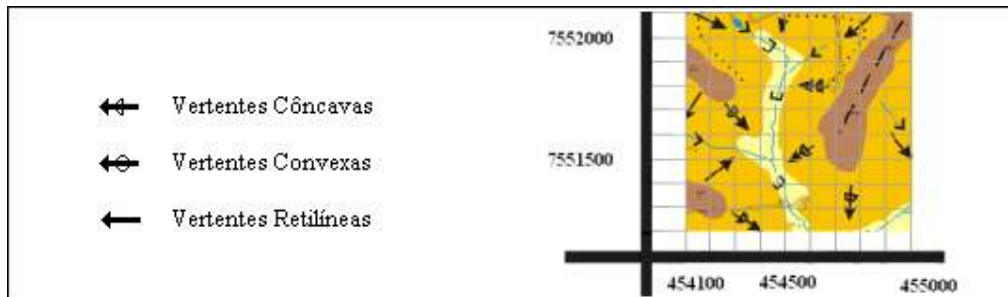


Figura 4 – Classificação da curvatura de vertentes da área de estudo A via mapa geomorfológico.

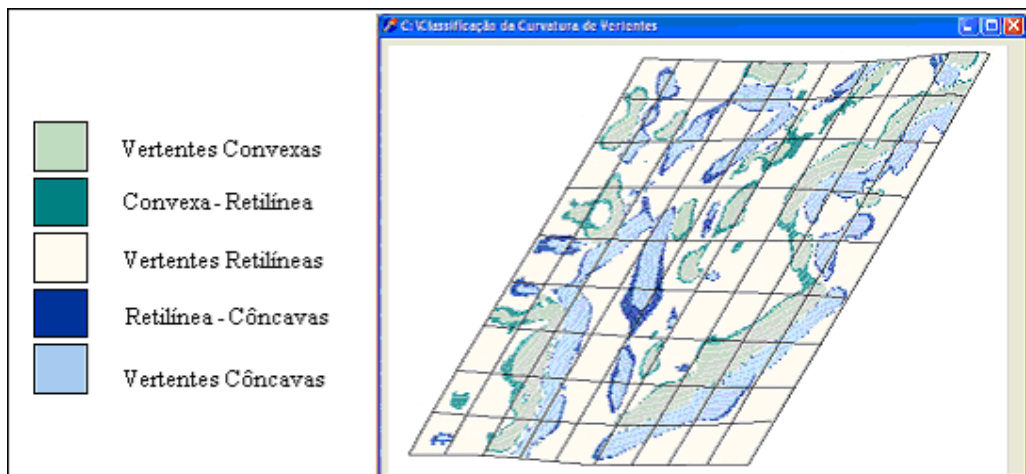


Figura 5 – Classificação da curvatura de vertentes da área de estudo A via implementação.

A comparação entre as duas imagens é de fundamental importância na validação dos resultados apresentados pela implementação, porém a possibilidade de trabalhar com diversas áreas, apresentada pela implementação, exige que a comparação ocorra para cada área de estudo.

Os quadrantes que subdividem as áreas em questão foram utilizados como base para comparação entre as imagens, que foi realizada de maneira visual e subjetiva, considerando também a percepção dos fundos de vale para os quais as vertentes se dirigem (direção da vertente) e a diferença na quantidade de informação existente em cada representação cartográfica da área. Enquanto o MNT apresenta valores de curvatura para cada um dos pontos, o mapa geomorfológico apresenta apenas tendências de curvatura para as vertentes da área analisada.

A Tabela 1 apresenta a comparação entre as classificações de curvatura em perfil obtidas por ambos os métodos para a área de estudo A. Os bons resultados foram constatados não só pelas porcentagens de acerto obtidas, mas principalmente pelo fato de se mostrar próximo a realidade de acordo com a visão de especialistas.

Tabela 1 - Comparação dos resultados apresentados para a Área A no mapa geomorfológico e no MNT gerado.

	Mapa geomorfológico	MNT gerado					
	Classificações	correta	incorreta	incerteza	% correta	% incorreta	% incerteza
Côncavas	5	3	1	1	60%	20%	20%
Retilíneas	5	5	0	0	100%	0%	0%
Total	10	8	1	1	80%	10%	10%

O MNT classificado de acordo com a curvatura de vertentes pode ser gerado para qualquer área, desde que essa área possua dados de latitude, longitude e altimetria devidamente armazenados em um arquivo tipo .txt e possua a classificação prévia de suas vertentes através de um mapa geomorfológico para que a comparação dos resultados seja possível. Assim resultados igualmente satisfatórios foram obtidos nesse trabalho para diversas áreas do município de Presidente Prudente – S.P.

#### 4. Conclusão

Sendo a classificação da curvatura de vertentes em perfil um dado de grande importância para diversas áreas do conhecimento, que se interessam pela usabilidade do solo e pela minimização dos impactos a ele associados, é possível concluir que a metodologia apresentada se mostra capaz de classificar um Modelo Numérico de Terreno de acordo com essa característica.

Os resultados obtidos contribuem de maneira relevante para a automatização do processo de classificação de feições geomorfológicas, pois possibilita a obtenção de informações a respeito da curvatura vertical de vertentes para qualquer área que possua uma base digital planoaltimétrica, o que até o momento só era possível através de estereoscopia, para áreas mapeadas por fotografias aéreas, ou da visita de um especialista a área. Porém é importante ressaltar que a automatização de um processo como esse, que está intimamente ligado as percepções de um especialista, requer muitos cuidados, pois muitas são as características que influenciam a concavidade/convexidade de uma vertente, além das constantes modificações causadas nessas feições pelo homem e pelo tempo.

Assim os bons resultados obtidos nesse trabalho se apresentam como uma possibilidade para as aplicações já realizadas com os mapas geomorfológicos, bem como para novas aplicações, mais locais e que necessitem de maior quantidade de informação quanto a

característica curvatura de vertentes em perfil e devem ser utilizados com o intuito de obter informações prévias sobre as feições geomorfológicas da área em estudo, de forma a otimizar os trabalhos realizados em campo que continuam sendo de fundamental importância para qualquer análise de terreno.

### Agradecimentos

À Secretaria de Planejamento do município de Presidente Prudente por disponibilizar os dados cartográficos utilizados no trabalho e a [Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior](#) (CAPES) pelo financiamento da pesquisa de mestrado que resultou na dissertação “Classificação da Curvatura de Vertentes em Perfil via *Thin Plate Spline* e Inferência *Fuzzy*” e no presente artigo.

### Referencias Bibliograficas

1. Barbosa, R.L.; Meneguete Jr., M.; Silva, J.F.C.; Gallis, R.B.A. 2003. Geração de Modelo Digital de Terreno utilizando triangulação de Delaunay e *Thin plate spline*. In: **Anais do III Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas**, Vol.3, Curitiba.
2. Blaszczynski, J.S. 1997. Landform characterization with Geographic Information Systems. In: **Photogrammetric Engineering & Remote Sensing**, V. 63, n.º 2, p. 183-191.
3. Boyd, S. K.; Ronsky, J. L.; Lichti, D. D.; K. Salkauskas, M. A. Chapman. 1999 . Joint surface modeling with thin-plate splines. **J. Biomech.** Eng. n. 121, p.525–532.
4. Bookstein FL. Principal warps: Thin-plate Splines and decomposition of deformations. **PAMI**, vol. 11, no. 6, pp. 567-585, 1989.
5. Castanho, J.E.C.; Tozzi, C.L. 1996 Obtenção da Transformação de Corpo Rígido em Registro de Imagens com Deformação usando Thin Plate Spline. In: **Anais do IX SIBGRAPI**. Caxambu. p. 181-187.
6. Costa, L.F.; Cesar Jr, R.M. 2001. **Shape Analysis and Classification: Theory and Practice**, CRC Press, Boca Raton, 346 p.
7. Guerra, T. A.; **Dicionário Geológico e Geomorfológico**. 8. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 1993.
8. Klir, G.J.; Yuan, B. 1996. **Fuzzy Sets, Fuzzy Logic and Fuzzy Systems: Selected papers by Lotfi A. Zadeh**. Singapore: World Scientific.
9. Mendes, C.A.; Mediondo, E.M.; Collischonn, W. 1998. Modelos numéricos do terreno e suas aplicações a bacias hidrográficas: princípios gerais. In: **Anais do Congresso Nacional del Água**. Santa Fé, Argentina, p.82,89.
10. Nunes, J.O.R. Mapeamento Geomorfológico do perímetro urbano de Presidente Prudente – S.P. 2005. In: **Anais da 57ª Reunião Anual da SBPC**. Fortaleza.
11. Pedrycz, W.; Gomide, F. 1998. **An Introduction to Fuzzy Sets – Analysis and Design**, Cambridge, The MIT Press.
12. Valeriano, M. M. 2003. Curvatura vertical de vertentes em microbacias pela análise de modelos digitais de elevação. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, v.7, n.3, p.539-546.
13. Veloso, A.J.G. 2002. Importância do Estudo das Vertentes. **GEOgraphia**. V.8, n.8.
14. Zadeh, L. A. 1965. *Fuzzy sets*. **Information and control**, v.8, n.3, p. 338-353.
15. Schmidt, J.; Hewit, A. 2004. Fuzzy land element classification from DTMs based on geometry and terrain position. **Geoderma**. n. 121, p. 243 –256.