

## Matrizes de espalhamento utilizadas na Polarimetria SAR e o teorema da reciprocidade

Nilo Sergio de Oliveira Andrade<sup>1,2</sup>  
Antonio Nuno de Castro Santa Rosa<sup>2</sup>  
Paulo César de Carvalho Faria<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Comando da Aeronáutica – Centro de Lançamento de Alcântara – CLA  
Av. dos Libaneses, nº 29 – Tirirical – 65056-480 – São Luís – MA, Brasil  
dop@cla.aer.mil.br

<sup>2</sup> Instituto de Geociências – Universidade de Brasília – UNB  
Campus Universitário Darcy Ribeiro – CEP 70910-900 - Brasília – DF, Brasil  
nunos@unb.br

<sup>3</sup> Departamento de Química – Instituto Tecnológico da Aeronáutica – ITA  
Praça Mal Eduardo Gomes, 50 – Vila das Acácias – 12228-900 – S.J.Campos – SP, Brasil  
carvalho@ita.br

**Abstract.** This paper is concerned with the notions of the matrices commonly used in the field of radar polarimetry, such as Jones matrix, Sinclair matrix, Mueller matrix (also known as Stokes matrix), Kennaugh matrix and coherence matrix. Although the Jones and Sinclair matrices are quite similar, the same can be said to Mueller and Kennaugh matrices, there exists a basic difference between them that seems to have been overlooked by a number of researches, resulting in a great deal of confusion. An attempt is made to clarify this point and to present the basic relationships of radar polarimetry in a compact form.

**Palavras-chave:** scattering matrix, Jones matrix, Sinclair matrix, Mueller matrix, Kennaugh matrix, matriz de espalhamento, matriz de Jones, matriz de Sinclair, matriz de Mueller, matriz de Kennaugh.

## 1. Introdução

Nas aplicações de Sensoriamento Remoto Radar uma onda é transmitida, espalhada por um alvo no solo e seu eco recebido. Isto significa que tanto a onda transmitida quanto a recebida (ou espalhada) são conhecidas, podendo, ambas, ser representadas por um vetor.

A onda transmitida pode ser representada pelos vetores de Jones ou de Stokes, quando se utiliza o sistema de coordenadas FSA, ou pelo vetor de Kennaugh, quando se utiliza o sistema de coordenadas BSA. O vetor de Jones também pode ser utilizado no sistema BSA, porém com algumas modificações.

A transformação do vetor de onda transmitido para o vetor de onda recebido é uma transformação linear que pode ser descrita por uma matriz, a qual contém toda a informação relativa ao processo de espalhamento.

Se as influências relacionadas ao caminho de propagação da onda forem corrigidas ou desprezadas, esta matriz passa a descrever o espalhador no solo. Portanto, o entendimento destas matrizes é de extrema importância para a análise dos dados coletados e para a extração de informações.

## 2. A matriz de espalhamento e o teorema da reciprocidade

Normalmente, são utilizadas duas representações diferentes para os espalhadores. A primeira emprega a matriz de Jones ou a matriz de Sinclair, quando se utiliza os sistemas de coordenadas FSA e BSA, respectivamente, e a segunda utiliza a matriz de Stokes (também chamada de matriz de Mueller) ou matriz de Kennaugh, quando se utiliza os sistemas de coordenadas FSA e BSA, respectivamente.

Ambas as representações reproduzem a relação entre os vetores incidentes e a onda espalhada e, portanto, a informação sobre o espalhador (Zebker, 1987).

As matrizes de Jones (FSA) ou de Sinclair (BSA) são utilizadas quando se representa a onda por intermédio do vetor de Jones, enquanto que as matrizes de Mueller (ou de Stokes), no sistema de coordenadas FSA, e a matriz de Kennaugh, no sistema de coordenadas BSA, são utilizadas quando a onda é representada pelos vetores de Stokes ou de Kennaugh, respectivamente.

A convenção FSA é um sistema orientado pela onda, que define o sistema de coordenadas local orientado para a direita em relação à direção de propagação da onda. Já a convenção BSA é um sistema orientado pela antena, definindo o sistema de coordenadas local em relação à polarização da antena (Hellmann, 2001).

## 3. A matriz de Jones e a matriz de Sinclair

Devido às diferentes regras convencionadas para o sistema de coordenadas, a matriz de espalhamento toma formas diferentes nas convenções FSA e BSA. Na convenção BSA a matriz de espalhamento é chamada de matriz de Sinclair - (S), enquanto na convenção FSA é chamada de matriz de Jones - (T).

Um espalhador iluminado por uma onda transmitida por um SAR re-irradia uma onda espalhada, que deve ser considerada uma onda esférica, quando longe deste espalhador. Esta onda pode ser aproximada para uma onda plana sobre a área, relativamente pequena, ocupada pela antena de recepção.

A matriz de espalhamento (S) é uma matriz complexa  $2 \times 2$  que expressa como um espalhador transforma o campo elétrico transmitido  $E^t$  no campo elétrico recebido  $E^r$ , ou seja, é uma matriz que contém as informações relativas ao alvo.

Conforme citado por Ulaby e Elachi (1990, p.21), esta matriz é definida de acordo com os trabalhos de (Sinclair, 1950; Kennaugh, 1951 e van de Hulst, 1981).

$$E^r = \frac{e^{ikr}}{r} (\mathbf{S}) \cdot E^t \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} E_h^r \\ E_v^r \end{bmatrix} = \frac{e^{ikr}}{r} \begin{pmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E_h^t \\ E_v^t \end{bmatrix} \quad (1)$$

Onde  $r$  corresponde à distância do espalhador, ou seja, a distância entre a antena e o alvo e  $k$  é o número de onda do sinal transmitido.

A convenção BSA, que tem sido o sistema preferido na área de polarimetria SAR monostática, é utilizada e a matriz de espalhamento definida em (1) relaciona a onda espalhada ou recebida (que é vista aproximando-se da antena de recepção) à onda incidente ou transmitida, que é vista se afastando da antena de transmissão (Boerner et al., 1998).

A matriz ( $\mathbf{S}$ ), que é expressa nas coordenadas BSA, ou seja, a matriz de Sinclair, caracteriza o comportamento do espalhador para uma configuração de imageamento particular. Seus elementos  $S_{tr}$  são chamados de “amplitudes espalhadas complexas”, e os subscritos  $t$  e  $r$  se referem à polarização transmitida e recebida, respectivamente.

De uma forma geral, cada uma das amplitudes espalhadas pode ser função da frequência, do ângulo de incidência e de espalhamento e da orientação do espalhador em relação ao sistema de coordenadas (ângulo de aspecto do alvo), (Ulaby e Elachi, 1990).

De acordo com Oliver e Quegan, 1998, as seguintes condições estão implícitas na formulação de (1):

- Adequada amostragem das polarizações transmitidas H e V, quando do seu retorno à antena;
- Preservação da coerência da fase entre os canais;
- Correta amostragem de tal forma que todas as respostas sejam medidas na mesma posição; e
- Preservação do estado interno dos espalhadores entre os pulsos.

Enquanto as três primeiras condições apresentadas estão relacionadas ao sistema, podendo ser tratadas como um problema de engenharia, a última depende das características físicas do alvo (Oliver e Quegan, 1998).

Para alvos cujo estado interno é inalterado pela polarização da onda incidente ocorrerá reciprocidade entre os canais de polarização cruzada, ou seja, entre os canais *cross-polarized*. Assim, na convenção BSA, para sistemas monostáticos tem-se:

$$S_{hv} = S_{vh} = S_x \quad (2)$$

Desta forma, a matriz de espalhamento ( $\mathbf{S}$ ) se reduz para:

$$\begin{pmatrix} S_{hh} & S_x \\ S_x & S_{vv} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Ou seja, se o alvo for recíproco, a matriz ( $\mathbf{S}$ ) torna-se simétrica.

Devido à relação dada por (3), a matriz de espalhamento ( $\mathbf{S}$ ) contém somente cinco parâmetros independentes (três amplitudes e duas fases relativas).

O comportamento de reciprocidade entre os canais cruzados é esperado para a maior parte dos espalhadores que ocorrem na natureza, resultando, assim, em uma redução do volume de dados. Contudo, alguns podem ser construídos para os quais esta condição é violada, assim a equação (1) passaria a não ter sentido, exceto para os canais de polarização paralela, HH e VV (Oliver e Quegan, 1998).

Mesmo quando os alvos são recíprocos, as medidas dos valores de  $S_{hv}$  e  $S_{vh}$  podem não ser idênticas, devido à imperfeições do sistema. Na realidade, o SAR polarimétrico pode ser afetado por diversas formas de distorção, dentre as quais cita-se:

- Ligação indevida entre as polarizações cruzadas (HV e VH), seja na transmissão e/ou na recepção do sinal, chamado, em inglês, de “crosstalk”; e
- Desbalanceamento entre os canais H e V causado por diferentes potências de transmissão, diferentes ganhos na recepção e/ou deslocamento de fase entre os canais, induzido pelo sistema.

A assunção do teorema da reciprocidade como verdadeiro baseia-se fortemente na calibração dos dados, uma vez que tanto o desbalanceamento entre os canais quanto o “crosstalk” podem afetar severamente as medições.

De acordo com Oliver e Quegan (1998), dentre estas distorções a mais prejudicial é a primeira, pois embaralha a informação nos diferentes canais.

A correção do desbalanceamento entre canais pode ser separada em correção das distorções de fase e de amplitude. Necessita-se de alvos específicos para a calibração ou de tonalidades internas à imagem para a remoção destes efeitos (Oliver e Quegan, 1998).

Quanto à potência de transmissão, flutuações podem indicar falhas do transmissor.

A relação entre o sinal transmitido e o sinal recebido, apresentada em (1), também pode ser expressa utilizando-se uma matriz real  $4 \times 4$  – a matriz de Stokes ( $L$ ) ou de Mueller ( $M$ ), quando o sistema de coordenadas aplicado é o FSA, ou a matriz de Kennaugh ( $K$ ), também uma matriz real  $4 \times 4$ , quando o sistema de coordenadas é o BSA.

#### 4. A matriz de Stokes (ou de Mueller)

Outro método de descrever um espalhador, que é amplamente utilizado em óptica, é a matriz de Stokes. Em 1943 Hans Mueller desenvolveu um método matricial de lidar com os vetores de Stokes. Vale lembrar que os vetores de Stokes têm o atributo de poderem ser aplicados a ondas não coerentes polarizadas e não polarizadas.

O método de Mueller utiliza-se desta qualidade e, portanto, complementa o método de Jones. Este último, entretanto, pode lidar com ondas coerentes, ao passo que método de Mueller não tem esta capacidade.

A diferença entre as matrizes de Mueller e de Stokes é que a matriz de Mueller **não** assume o teorema da reciprocidade e, portanto, contém mais elementos independentes; ambas sendo utilizadas na convenção FSA.

Se um alvo iluminado re-irradia uma onda espalhada completamente polarizada, a polarização da onda pode ser deduzida a partir da polarização da antena de transmissão utilizando-se a matriz de espalhamento ou as matrizes de Mueller/Stokes ou de Kennaugh.

Geralmente, existem **sete** parâmetros independentes na matriz de espalhamento: **quatro** amplitudes independentes e **três** fases (referenciadas a um dos quatro elementos complexos da matriz de espalhamento). Portanto, se a fase absoluta for ignorada, somente **sete** elementos reais devem caracterizar completamente esta matriz.

Assumindo-se que o teorema da reciprocidade possa ser aplicado, ou seja,  $S_{hv} = S_{vh}$ , a matriz de espalhamento passa a ser caracterizada por somente **cinco** elementos reais.

Alguns alvos não podem ser representados pelas matrizes de Jones ou de Sinclair. Isto ocorre se o alvo tiver mais do que um centro espalhador (isto é efetivamente representado por uma série de espalhadores simples) e apresentar um ângulo de aspecto variável em relação à onda incidente ou ter um movimento vibratório que faz com que os centros espalhadores modifiquem suas distâncias entre si. Também ocorre se a onda incidente não for monocromática.

A questão sobre se o alvo tem ou não a matriz de Jones ou de Sinclair depende entre outras coisas do tempo de observação do radar. Se o tempo de observação for infinitesimal, todos os alvos terão uma matriz de espalhamento, mas em muitos casos a descrição desta matriz falha. Neste caso, a onda incidente ainda tem um vetor de Stokes de quatro parâmetros, da mesma forma que a onda espalhada. O alvo serve, então, para transformar o vetor de Stokes incidente em um novo vetor de Stokes. Esta transformação requer uma matriz real  $4 \times 4$  para representar o alvo.

Uma das formas de transformação utiliza a convenção FSA e é chamada de matriz de Mueller (M). Esta transformação é válida se a onda for:

- monocromática e completamente polarizada;
- completamente polarizada mas não monocromática; ou
- parcialmente polarizada.

Neste caso, **dezesseis** elementos reais são necessários para caracterizar completamente o sistema, as amplitudes dos quatro canais e os seis coeficientes de correlação complexa entre os canais, os quais têm módulos e fase, (Van Zyl et al., 1987).

Se o teorema da reciprocidade for assumido, a matriz de Stokes passa a ser simétrica e somente **nove** elementos são necessários para caracterizá-la.

Os elementos da matriz de Mueller são, em geral, sensíveis à frequência e, portanto, não são independentes da onda incidente.

Assim como a matriz de Jones (ou de Sinclair), a matriz de Mueller pode não ser constante para um determinado alvo. Se o alvo não sofre movimentações bruscas, mas somente movimentos vibratórios em uma escala de tempo pequena quando comparada com o tempo de integração médio do radar, ou não sofre quaisquer movimentações, a matriz de Mueller será constante.

O vetor de Stokes da onda espalhada relaciona-se com o vetor de Stokes da onda incidente por intermédio da matriz de Mueller (M):

$$\vec{S}^s = \frac{1}{4\pi r^2} (M) \cdot \vec{S}^i \quad (4)$$

O fator multiplicador representa o decréscimo da potência da onda espalhada entre o alvo e o receptor.

No caso de um alvo sem a matriz de Jones, os elementos da matriz de Mueller devem ser medidos. Contudo, se o alvo tiver a matriz de Jones, existe uma relação entre os elementos das duas matrizes. Esta relação e a dedução da matriz de Mueller podem ser verificadas em (Andrade, 2006).

## 5. A matriz de Kennaugh

Segundo Ioannidis e Hammers (1979), esta matriz foi introduzida por Kennaugh em 1951 para a avaliação da potência recebida por um radar.

Utilizando a convenção BSA, o vetor de Stokes da onda retroespalhada relaciona-se ao vetor de Stokes da onda incidente por intermédio da matriz de Kennaugh, (K) e os vetores passam a se chamar vetores de Kennaugh (Boerner et al., 1998). A matriz de Kennaugh (K) é a versão da matriz de Stokes, utilizada na convenção BSA.

$$\vec{k}^s = \frac{1}{4\pi r^2} (\mathbf{K}) \cdot \vec{k}^i \quad (5)$$

Segundo Boerner et al. (1998), a matriz 4×4 de Kennaugh é dada por:

$$(\mathbf{K}) = 2(\mathbf{A})^* \cdot (\mathbf{W}) \cdot (\mathbf{A})^{-1} \quad (6)$$

Com  $(\mathbf{W}) = (\mathbf{S}) \otimes (\mathbf{S})^*$ , onde (S) corresponde à matriz de Sinclair e  $\otimes$  simboliza o produto de Kronecker. A matriz de expansão 4×4 (A) é dada por:

$$(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

com  $A^{-1} = (1/2) A^{*T}$  (Boerner et al., 1998).

A matriz de Mueller (M) e a matriz de Kennaugh (K) se relacionam por intermédio da seguinte relação:

$$(\mathbf{M}) = \text{diag}[1 \quad 1 \quad -1 \quad 1] \cdot (\mathbf{K}) \quad (8)$$

Esta relação só é formalmente correta se ambas as matrizes descrevam mecanismos de espalhamento completamente diferentes: espalhamento tomando por base a direção de deslocamento da onda ou “forward scattering” para (M) e espalhamento tomando por base a antena de recepção ou “backscattering” para (K). Geralmente, os dados de sensores SAR são fornecidos no formato da matriz de Kennaugh e assumindo-se a reciprocidade do sistema.

Uma vez que os vetores que representam a onda espalhada, utilizados para definir as matrizes de Mueller e Kennaugh, diferem somente no sistema de coordenadas utilizado, para o componente de campo elétrico, estas matrizes podem ser formalmente relacionadas.

A relação entre a matriz de Kennaugh e a matriz de Sinclair, para alvos que têm a matriz de Sinclair pode ser verificadas em (Andrade, 2006).

A **Tabela 1** apresenta um resumo relativo aos vetores utilizados na representação das ondas transmitidas e recebidas pelo SAR, assim como sobre as matrizes utilizadas na representação dos alvos. Relaciona, também, os vetores e matrizes com os sistemas de coordenadas FSA e BSA.

Tabela 1. Resumo sobre a representação das ondas incidente e espalhada e sobre a caracterização dos alvos.

SISTEMA DE COORDENADAS UTILIZADO	REPRESENTAÇÃO DA ONDA INCIDENTE (TRANSMITIDA) – COMPLETAMENTE POLARIZADA	REPRESENTAÇÃO DO ALVO	REPRESENTAÇÃO DA ONDA ESPALHADA – PARCIALMENTE POLARIZADA
<b>FSA</b> – Forward Scatter Alignment	Vetor de Jones: $\vec{J}^i$ (2×1 complexo)	Matriz de Jones: (T) (2×2 complexa)	Vetor de Jones: $\vec{J}^s$ (2×1 complexo)
<b>BSA</b> – Backscatter Alignment	Vetor de Jones: $\vec{J}^t$ (2×1 complexo)	Matriz de Sinclair: (S) (2×2 complexa)	Vetor de Jones: $\vec{J}^r$ (2×1 complexo)
<b>FSA</b> – Forward Scatter Alignment	Vetor de Stokes: $\vec{S}^i$ (4×1 real)	Matriz de Mueller: (M) (4×4 real) ou Matriz de Stokes (L) (4×4 real)	Vetor de Stokes: $\vec{S}^s$ (4×1 real) ou Matriz de coerência: (J) (2×2 Hermitiana)
<b>BSA</b> – Backscatter Alignment	Vetor de Kennaugh: $\vec{k}^t$ (4×1 real)	Matriz de Kennaugh: (K) (4×4 real)	Vetor de Kennaugh: $\vec{k}^r$ (4×1 real)

Em adição às matrizes de Mueller (M) e de Kennaugh (K), duas matrizes conhecidas como matriz de covariância do alvo e matriz de coerência do alvo podem ser utilizadas para a caracterização de ondas parcialmente polarizadas.

Quando o alvo em estudo apresenta um comportamento determinístico, ou seja, os espalhadores são determinísticos, estes alvos são completamente descritos por uma matriz de espalhamento (S) única ou por um vetor de espalhamento do alvo.

Para as aplicações de Sensoriamento Remoto, assumir que os espalhadores são puramente determinísticos não é válido, visto que a célula de resolução é maior do que o comprimento de onda utilizado pelo sistema, ou seja, os alvos naturais contêm muitos espalhadores determinísticos espacialmente distribuídos, sendo cada um destes espalhadores completamente representados por uma matriz (S)<sub>i</sub> individual.

Desta forma, a matriz (S) medida para uma célula de resolução consiste de uma superposição coerente das matrizes individuais (S)<sub>i</sub> de todos os espalhadores localizados dentro da célula de resolução.

A fim de lidar com a estatística dos efeitos do espalhamento e com a análise dos espalhadores foi introduzido o conceito de matriz de covariância e de coerência do espalhador (Cloude and Pottier, 1996).

Informações detalhadas sobre essas matrizes, assim como a dedução das mesmas, podem ser obtidas em (Andrade, 2006).

## Conclusão

Em polarimetria radar, algumas matrizes podem ser utilizadas para a representação do alvo. A matriz de Mueller (M), que relaciona o vetor de Stokes espalhado com o vetor de Stokes incidente, é normalmente expressa na convenção FSA para as aplicações na área de óptica,

contudo, para as aplicações na área de polarimetria radar, é conveniente que seja expressa na convenção BSA.

Outra matriz similar, mas não idêntica, permite o cálculo da energia recebida pelo radar, desde que os vetores de Stokes espalhado e transmitido sejam referenciados a mesma referência, ou seja, à antena: isto só é possível na convenção BSA. Neste caso, os vetores passam a ser conhecidos como vetores de Kennaugh e a matriz como matriz de Kennaugh (K).

Conforme apresentado, a matriz de Kennaugh é simétrica, desde que a convenção BSA seja utilizada. Por outro lado, a matriz de Mueller nunca é simétrica, independente da convenção utilizada, FSA ou BSA.

As matrizes de Mueller e de Kennaugh não diferem muito, somente os elementos da terceira linha têm sinais opostos. Este é um fato bem conhecido e esta similaridade conduz a confusões entre uma e outra matriz.

## Referências

- Andrade, N. S. O. **Radar de Abertura Sintética Polarimétrico do SIVAM – Análise e Aplicações**. Tese de Doutorado (em fase de escrita). Universidade de Brasília, Instituto de Geociências, Brasília – D.F. 2006.
- Boerner, W., Mott, H., Luneburg, E., Livingstone, C., Brisco, B., Brown, R. and J. Patterson. Polarimetry in Radar Remote Sensing: Basic and Applied Concept, in Principles and Applications of Imaging Radar, **Manual of Remote Sensing**, 3rd Ed. v. 3, F. Hendeson and A. Lewis, Eds., Wiley and Sons, 1998.
- Boerner, W.; Mott, H.; Luneburg, E.; Livingstone, C.; Brisco, B.; Brown, R.; J. Patterson. Polarimetry in Radar Remote Sensing: Basic and Applied Concept, in Principles and Applications of Imaging Radar, **Manual of Remote Sensing**, 3rd Ed., v. 3, F. Hendeson and A. Lewis, Eds., Wiley and Sons, 1998.
- Cloude, S.R.; Pottier, E. A review of target decomposition theorems in radar polarimetry. **IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing**, v. 34, n. 2, p. 498–518, 1996.
- Hellmann, M.P. **SAR Polarimetry Tutorial (Beta version 0.1a)**. [2001]. [on line]. Disponível em: <<http://epsilon.nought.de/tutorials/polSMART/index.php>>. Acesso em: 11 Set. 2006.
- Ioannidis, G. A.; Hammers, D. E. Optimum antenna polarization for target discrimination in clutter. **IEEE Transactions on Antennas Propagation**, v. AP-27, p. 357-363, May 1979.
- Kennaugh, E. M. Effects of the type of polarization on echo characteristics. **Technical Report 389-9**, Antenna Laboratory, Ohio State University, Columbus, 1951.
- Oliver, C. J.; Quegan, S. **Understanding synthetic aperture radar images**, Artech House, 1998. 479 p.
- Sinclair, G. The transmission and reception of elliptically polarized waves. **Proceedings of IRE**, v. 38, p. 148-151, 1950.
- Ulaby, F. and Elachi, C. **Radar Polarimetry for Geoscience Applications**, Artech House, 1990. 364 p.
- Van de Hulst, H.C. **Light scattering by small particles**, pp. 28-42, Dover, New York, 1981.
- Van Zyl, J.J.; Zebker, H.A.; Elachi, C. Imaging Radar Polarization Signatures: Theory and Observation. **Radio Science**, v. 22, p. 529-543, 1987.
- Zebker, H.A.; Van Zyl, J.J., Held D.N. Imaging Radar Polarimetry from Wave Synthesis. **Journal of Geophysical Research**, v. 92, p. 683-701, 1987.