

Representações para ondas completamente polarizadas em polarimetria SAR

Nilo Sergio de Oliveira Andrade^{1,2}
Antonio Nuno de Castro Santa Rosa²
Paulo César de Carvalho Faria³

¹ Comando da Aeronáutica – Centro de Lançamento de Alcântara – CLA
Av. dos Libaneses, nº 29 – Tirirical – 65056-480 – São Luís – MA, Brasil
dop@cla.aer.mil.br

² Instituto de Geociências – Universidade de Brasília – UNB
Campus Universitário Darcy Ribeiro – CEP 70910-900 - Brasília – DF, Brasil
nunos@unb.br

³ Departamento de Química – Instituto Tecnológico da Aeronáutica – ITA
Praça Mal Eduardo Gomes, 50 – Vila das Acácias – 12228-900 – S.J.Campos – SP, Brasil
carvalho@ita.br

Abstract. This paper will introduce the vector representations (Stokes, Kennaugh, and Jones) of a plane electromagnetic wave polarization. Some important applications of each of those vector representations will be discussed. The synthesis of the linear, circular, and elliptical polarization, from the Jones Vector perspective, will be derived.

Palavras-chave: Stokes vector, Jones vector, modified Stokes vector, Kennaugh vector, completely polarized waves, vetor de Stokes, vetor de Jones, vetor de Stokes modificado, vetor de Kennaugh, ondas completamente polarizadas.

1. Introdução

Este trabalho discorre sobre a representação (vetor de Stokes, vetor de Kennaugh e vetor de Jones) da polarização de uma onda eletromagnética plana. Cada um desses vetores tem a sua aplicação típica no campo da polarimetria. Especificamente, o vetor de Stokes é útil tanto para caracterizar ondas completamente polarizadas como para ondas parcialmente polarizadas. Esse também é o caso para ondas não polarizadas. Já o vetor o Vetor de Jones aplica-se somente a ondas totalmente polarizadas, sendo bastante empregado no estudo da composição de ondas eletromagnéticas planas, em termos da polarização resultante, conforme será visto adiante.

2. Vetor de Stokes

O vetor de Stokes pode ser definido em relação a seis medidas de fluxo P realizadas com polarizadores ideais posicionados em frente a um radiômetro (Shurcliff, 1962).

- P_h Polarizador linear horizontal (0°)
- P_v Polarizador linear vertical (90°)
- P_{45} Polarizador linear a 45°
- P_{135} Polarizador linear a 135°
- P_R Polarizador circular para a direita
- P_L Polarizador circular para a esquerda

Normalmente, estas são medidas de irradiância (W/m^2) embora outras medidas de fluxo possam ser utilizadas. O vetor de Stokes é definido como:

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_H + P_V \\ P_H - P_V \\ P_{45} - P_{135} \\ P_R - P_L \end{bmatrix} \quad (1)$$

Onde, S_0, S_1, S_2 e S_3 são os elementos ou parâmetros do vetor de Stokes (função do comprimento de onda, da posição do objeto e da direção do feixe de energia do emissor ou espalhador). Portanto, a medição do vetor de Stokes é uma média que leva em consideração uma área, um ângulo sólido e um comprimento de onda, como qualquer medição radiométrica.

Também há outras formas de se obter esse mesmo vetor. No entanto, quaisquer que sejam os métodos utilizados, os resultados devem ser coincidentes com (1). Isso significa que o uso de polarizadores ideais, para a determinação do vetor de Stokes, não é obrigatório.

Cada elemento do vetor de Stokes tem sua unidade em Watts por metro quadrado, sendo o vetor definido com relação a um sistema de coordenadas local X–Y, definido no plano perpendicular ao vetor de propagação. O sistema de coordenadas é orientado para a direita e o produto $\vec{x} \times \vec{y}$ dos vetores aponta na direção de propagação do feixe de energia.

O estado de polarização de uma onda plana pode ser caracterizado pelos parâmetros a_v , a_h e δ ou, alternativamente, pelos parâmetros ψ , χ e I_0 , onde:

$$I_0 = a_v^2 + a_h^2 \quad (2)$$

Ou seja, I_0 é proporcional à intensidade total da onda (Ulaby and Elachi, 1990).

Em 1852, G. G. Stokes introduziu um terceiro conjunto de parâmetros (I_0 , Q , U e V), todos com a mesma unidade dimensional, para caracterizar o estado de polarização de uma onda. No caso dessa onda ser completamente polarizada, esses parâmetros (vetor de Stokes) são dados por (3):

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} I_0 \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |E_v|^2 + |E_h|^2 \\ |E_v|^2 - |E_h|^2 \\ E_v E_h^* + E_h E_v^* \\ i(E_v E_h^* - E_h E_v^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |E_v E_v^*| + |E_h E_h^*| \\ |E_v E_v^*| - |E_h E_h^*| \\ E_v E_h^* + E_h E_v^* \\ i(E_v E_h^* - E_h E_v^*) \end{bmatrix} \quad \therefore \quad (3)$$

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} I_0 \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |E_v|^2 + |E_h|^2 \\ |E_v|^2 - |E_h|^2 \\ 2\text{Re}(E_v E_h^*) \\ -2\text{Im}(E_v E_h^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_v^2 + a_h^2 \\ a_v^2 - a_h^2 \\ 2a_v a_h \cos \delta \\ 2a_v a_h \sin \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 \\ I_0 \cos 2\psi \cos 2\chi \\ I_0 \sin 2\psi \cos 2\chi \\ I_0 \sin 2\chi \end{bmatrix}$$

Onde, E_h e E_v indicam os componentes horizontal e vertical do vetor campo elétrico, com as amplitudes a_h e a_v e fases δ_h e δ_v , respectivamente; ψ é o ângulo de inclinação (ou orientação) e χ é o ângulo de excentricidade.

De (3), tem-se, ainda, que I_0 é proporcional à intensidade total da onda; Q indica o quanto a onda está polarizada vertical ou horizontalmente (polarização linear); U e V , em conjunto, fornecem informação sobre a diferença de fase entre os componentes vertical e horizontal do campo elétrico, expressando o quanto da onda está com polarização circular para a esquerda ou para a direita (Collett, 1993). Embora o vetor de Stokes consista de quatro parâmetros, todos eles reais, no caso de ondas completamente polarizadas, somente três deles são independentes, pois a soma dos componentes polarizados Q^2 , U^2 e V^2 é igual ao quadrado da intensidade total da onda. Assim sendo,

$$I_0^2 = Q^2 + U^2 + V^2 \quad (4)$$

De (3) temos que:

$$Q = I_0 \cos 2\psi \cos 2\chi; \quad U = I_0 \sin 2\psi \cos 2\chi \quad e \quad V = I_0 \sin 2\chi \quad (5)$$

Assim,

$$Q^2 = I_0^2 \cos^2 2\psi \cos^2 2\chi; \quad U^2 = I_0^2 \sin^2 2\psi \cos^2 2\chi \quad e \quad V^2 = I_0^2 \sin^2 2\chi \quad (6)$$

Logo,

$$Q^2 + U^2 = I_0^2 \cos^2 2\chi (\sin^2 2\psi + \cos^2 2\psi) = I_0^2 \cos^2 2\chi \quad (7)$$

$$V^2 = I_0^2 \sin^2 2\chi \quad (8)$$

Finalmente, a igualdade de (4) fica assim comprovada:

$$Q^2 + U^2 + V^2 = I_0^2 \cos^2 2\chi + I_0^2 \sin^2 2\chi = I_0^2 (\sin^2 2\chi + \cos^2 2\chi) = I_0^2 \quad (9)$$

O vetor de Stokes, por si só, não fornece nenhuma informação relativa à direção de propagação da onda. Sua expressão matemática só depende da escolha do sistema de coordenadas (Andrade, 2006) no plano transversal à direção de propagação, plano esse definido por (\vec{v}, \vec{h}) . Contudo, levando-se em consideração a direção de rotação do campo

elétrico (rotação para a esquerda ou para direita) em relação à direção de propagação (\vec{k} ou $-\vec{k}$), dois sistemas de coordenadas locais podem ser definidos: um orientado para a esquerda e outro, para direita.

A uma polarização orientada para a direita, em relação à direção de propagação \vec{k} (FSA - Forward Scattering Alignment Convention), corresponde uma polarização orientada para a esquerda em relação à direção inversa de propagação, $-\vec{k}$ (BSA – Backscatter Alignment Convention). Esse conceito, embora trivial, é muito importante para uma adequada interpretação das medições polarimétricas com radar.

O estado de polarização de uma onda completamente polarizada pode ser mapeado em um ponto único P na superfície de uma esfera com raio I_0 , chamada de Esfera de Poincaré. Os parâmetros Q , U e V definem as coordenadas esféricas do ponto P (Ulaby and Elachi, 1990) e os ângulos 2ψ e 2χ definem sua longitude e latitude, respectivamente.

Numa representação alternativa, o ponto P , agora grafado como M , passa a ter sua posição definida pelos parâmetros 2α e δ (Andrade, 2006).

O sinal de χ determina a orientação da polarização. Portanto, o hemisfério superior da esfera de Poincaré ($\chi > 0$) apresenta as polarizações orientadas para a esquerda, enquanto o hemisfério inferior ($\chi < 0$) apresenta as polarizações orientadas para a direita. O pólo norte representa as polarizações circulares para a esquerda e o pólo sul representa as polarizações circulares para a direita e, no plano do equador são encontradas as polarizações lineares.

Os parâmetros do vetor de Stokes para as diversas polarizações, assim como os valores para os ângulos de rotação (inclinação ou orientação) ψ , e excentricidade (elipsidade) χ são listados na **Tabela 1**.

Tabela 1. Ângulos de orientação e excentricidade e parâmetros de Stokes para vários estados de polarização linear e circular. A intensidade total é igual a 1.

	Polarização Linear			Polarização Circular	
	Horizontal	Vertical	Diagonal	Esquerda	Direita
a_h	1	0	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
a_v	0	1	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
$\delta_h - \delta_v$	0^0	0^0	$0^0, 180^0$	90^0	-90^0
ψ	$\pm 90^0$	0^0	$\pm 45^0$	indefinido	
χ	0^0	0^0	0^0	45^0	-45^0
Q	-1	1	0	0	0
U	0	0	± 1	0	0
V	0	0	0	1	-1

3. Vetor de Stokes modificado

A partir da definição de I_0 e Q dada por (3), as expressões para as intensidades individuais dos componentes polarizados verticalmente e horizontalmente podem ser obtidas conforme se segue:

$$I_0 = |E_v|^2 + |E_h|^2 \quad \text{e} \quad Q = |E_v|^2 - |E_h|^2 \quad (10)$$

Logo,

$$I_0 + Q = 2|E_v|^2 \quad \text{e} \quad I_0 - Q = 2|E_h|^2 \quad (11)$$

Assim,

$$I_v = |E_v|^2 = \frac{(I_0 + Q)}{2} = \frac{I_0 + I_0 \cos 2\psi \cos 2\chi}{2} = \frac{I_0}{2}(1 + \cos 2\psi \cos 2\chi) \quad (12)$$

De forma similar,

$$I_h = |E_h|^2 = \frac{(I_0 - Q)}{2} = \frac{I_0 - I_0 \cos 2\psi \cos 2\chi}{2} = \frac{I_0}{2}(1 - \cos 2\psi \cos 2\chi) \quad (13)$$

Assim, alternativamente, pode-se definir o vetor de Stokes modificado \vec{S}_m , que consiste do seguinte conjunto de parâmetros: I_v , I_h , U e V . Portanto,

$$\vec{S}_m = [I_v \quad I_h \quad U \quad V]^T \therefore \quad (14)$$

$$\vec{S}_m = I_0 \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 2\psi \cos 2\chi) \quad \frac{1}{2}(1 - \cos 2\psi \cos 2\chi) \quad \sin 2\psi \cos 2\chi \quad \sin 2\chi \right]^T$$

Segundo Chandrasekhar (1960), o conjunto de parâmetros definidos pelo vetor de Stokes modificado é mais adequado para a solução de problemas de transferência radiativa do que aquele conjunto de parâmetros originalmente introduzidos por Stokes. Os vetores \vec{S} e \vec{S}_m relacionam-se por intermédio da seguinte relação:

$$\vec{S} = \nu \vec{S}_m \quad (15)$$

Onde,

$$\nu = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

A partir de (12) e (13) pode-se comprovar a relação (15), pois, sendo

$$I_v = \frac{I_0 + Q}{2} \therefore 2I_v = I_0 + Q \quad (17)$$

e

$$I_h = \frac{I_0 - Q}{2} \therefore 2I_h = I_0 - Q \quad (18)$$

Tem-se, após soma de (17) e (18):

$$2(I_v + I_h) = 2I_0 \therefore I_0 = I_v + I_h \quad (19)$$

Da mesma forma, da subtração de (17) e (18) obtemos:

$$2(I_v - I_h) = 2Q \therefore Q = I_v - I_h \quad (20)$$

Finalmente, chega-se a:

$$\begin{aligned} I_0 &= I_v + I_h + 0U + 0V \\ Q &= I_v - I_h + 0U + 0V \\ U &= 0I_v + 0I_h + 1U + 0V \\ V &= 0I_v + 0I_h + 0U + 1V \end{aligned} \therefore \begin{bmatrix} I_0 \\ Q \\ U \\ V \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I_v \\ I_h \\ U \\ V \end{bmatrix} \quad (21)$$

Ficando, assim, comprovada a relação dada em (15).

4. Vetor de Kennaugh

Uma outra formulação, para a representação das ondas transmitida e recebida, utiliza o vetor de Kennaugh (quatro coordenadas). Semelhante ao vetor de Stokes, mas baseado em um sistema local de coordenadas com origem na antena, transmissão ou recepção (\vec{k} apontando para fora da antena), o vetor de Kennaugh emprega a convenção BSA (Backscatter Alignment), tratada em Andrade (2006), o que evita o problema de mudança no sistema de coordenadas e também, o problema da necessidade de se definir um vetor separado para a antena de recepção.

5. Vetor de Jones

O vetor de Jones - lembrar que, na convenção BSA, $E_x(t) \leftrightarrow E_h(t)$ e $E_y(t) \leftrightarrow E_v(t)$, enquanto que, na convenção FSA, $E_x(t) \leftrightarrow E_v(t)$ e $E_y(t) \leftrightarrow E_h(t)$ - uma representação alternativa para uma onda polarizada, foi proposto, em 1941, pelo físico americano R. Clark Jones, e tem como vantagem, além de ser uma notação extremamente concisa, a possibilidade de poder ser aplicada a ondas coerentes.

O vetor de Stokes é amplamente utilizado no campo da óptica, sendo o vetor de Jones o preferido para aplicações em Sensoriamento Remoto.

Diferentemente do vetor de Stokes, o vetor de Jones só se aplica a ondas polarizadas. A melhor forma de representar esse tipo de onda é em termos do seu vetor campo elétrico. O vetor-coluna de Jones fica, então, representado por:

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \end{bmatrix} \quad (22)$$

Onde $E_x(t)$ e $E_y(t)$ são os componentes escalares instantâneos de \vec{E} . Evidentemente, conhecendo-se \vec{E} , sabe-se tudo a respeito do estado de polarização da onda e, se a informação de fase for preservada, ondas coerentes podem ser manipuladas (Hecht, 1990). Assim, a equação (22) fica reescrita da seguinte forma:

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i\delta_x} \\ E_{0y}e^{i\delta_y} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Onde δ_x e δ_y representam as fases de $E_x(t)$ e de $E_y(t)$. Os componentes horizontal e vertical de \vec{E} são dados, respectivamente, por:

$$\vec{E}_h = \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i\delta_x} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{E}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{0y}e^{i\delta_y} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Note que $\vec{E} = \vec{E}_h + \vec{E}_v$, ou seja,

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i\delta_x} \\ E_{0y}e^{i\delta_y} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Se $E_{0x} = E_{0y}$ e $\delta_x = \delta_y$, o que corresponde à polarização linear + 45°. Então,

$$\vec{E}_{45} = E_{0x}e^{i\delta_x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

já que as amplitudes são iguais e a diferença de fase é nula. Nesse caso, pode-se normalizar a irradiância, \vec{E} , tornando-a um vetor unitário, mas à custa de perda de informação de fase, dividindo-a por um escalar, de tal forma que a soma dos quadrados dos seus componentes seja igual a 1 (um). Assim, dividindo-se (25) por $\sqrt{2} E_{0x} e^{i\delta_x}$ chega-se a:

$$\vec{E}_{45} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Do mesmo modo, pode-se mostrar que as equações (24), na forma normalizada, ficam:

$$\vec{E}_h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{E}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Na polarização circular à direita, $E_{0x} = E_{0y}$, $E_x(t)$ e $E_y(t)$ defasados de 90° . Tendo em vista o uso da forma $(kz - \omega t)$, é necessário adicionar-se $-\pi/2$ à fase δ_y . Portanto, para a polarização circular à direita:

$$\vec{E}_{\text{gr}} = \begin{bmatrix} E_{0x} e^{i\delta_x} \\ E_{0x} e^{i(\delta_x - \pi/2)} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Dividindo-se ambos os componentes por $E_{0x} e^{i\delta_x}$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ e^{-i\pi/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \quad (30)$$

E o vetor de Jones, normalizado, fica:

$$\vec{E}_{\text{gr}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \quad (31)$$

No caso da polarização circular à esquerda, obtém-se:

$$\vec{E}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad (32)$$

Combinando-se a polarização circular à direita com a polarização circular à esquerda, ou seja, (31) + (32), chega-se a:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1+1 \\ -i+i \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Que é uma onda polarizada horizontalmente, mas com o dobro da amplitude de cada componente. Ou seja, é possível sintetizar uma onda linearmente polarizada, a partir da soma de duas ondas com polarizações circulares opostas e de mesma amplitude.

O vetor de Jones, para uma onda elípticamente polarizada, pode ser calculado seguindo-se o mesmo método utilizado para se obter \vec{E}_{gr} e \vec{E}_L , mas, agora, E_{0x} não será, necessariamente, igual a E_{0y} , e a diferença de fase será, obrigatoriamente, diferente de 90° .

Para se obter uma onda com polarização elíptica, basta “esticar” a forma circular na direção de um dos eixos, vertical ou horizontal, multiplicando-se qualquer dos componentes do campo elétrico por um escalar (real). Deste modo, (34) descreve uma onda com polarização elíptica horizontal, orientada à direita.

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -i \end{bmatrix} \quad (34)$$

6. Conclusão

Esse trabalho mostrou que os parâmetros de Stokes, que caracterizam o estado de polarização de uma onda eletromagnética plana, podem ser definidos em relação a seis medidas de fluxo P realizadas com polarizadores ideais posicionados em frente a um radiômetro. Foi visto, também, que a forma de se obter esses parâmetros não é única, ou seja, quaisquer que sejam os métodos utilizados para se estabelecê-los, os resultados devem ser os mesmos. Significando que o uso de polarizadores ideais não é obrigatório.

Foi visto, também, que, em 1852, G. G. Stokes introduziu um terceiro conjunto de parâmetros (I_0 , Q , U e V), todos com a mesma unidade dimensional, a fim de caracterizar o estado de polarização de uma onda eletromagnética plana – o vetor de Stokes. Verificou-se que esse vetor, por si só, não fornece nenhuma informação relativa à direção de propagação da onda.

Mostrou-se-se, ainda, de forma sucinta, que o estado de polarização de uma onda eletromagnética completamente polarizada também pode ser mapeado em um ponto único, P , na superfície de uma esfera de raio I_0 , chamada de Esfera de Poincaré.

Na seqüência do trabalho, constatou-se-se que a uma polarização orientada para a direita, em relação à direção de propagação \vec{k} (FSA), corresponde uma polarização orientada para a esquerda em relação à direção inversa de propagação, $-\vec{k}$ (BSA), fato de extrema importância na manipulação de dados polarimétricos.

Foram, então, apresentadas duas formulações alternativas, para a representação das ondas transmitida e recebida, o vetor de Kennaugh, semelhante ao vetor de Stokes, mas baseado em um sistema local de coordenadas com origem na antena, transmissão ou recepção (\vec{k} apontando para fora da antena), ou seja, o vetor de Kennaugh emprega a convenção BSA (Backscatter Alignment), o que evita o problema de mudança no sistema de coordenadas e também, o problema da necessidade de se definir um vetor separado para a antena de recepção, e o vetor de Jones, e uma representação alternativa para uma onda polarizada, proposta, em 1941, pelo físico americano R. Clark Jones, que tem como vantagem, além de ser uma notação extremamente concisa, a possibilidade de poder ser aplicada a ondas coerentes, o vetor de Jones.

Finalmente, foram discutidas as peculiaridades de cada um dos vetores e suas áreas de aplicação. Verifica-se, pelo exposto nesse trabalho, a importância em se compreender o assunto a fim de possibilitar o adequado entendimento e manipulação de dados polarimétricos.

Referências

- Andrade, N. S. O. **Radar de Abertura Sintética Polarimétrico do SIVAM – Análise e Aplicações**. Tese de Doutorado (em fase de escrita). Universidade de Brasília, Instituto de Geociências, Brasília – D.F. 2006.
- Chandrasekhar, S. **Radiative Transfer**. New York: Dover, 1960, 60 p.
- Collet, E. **Polarized Light: Fundamentals and Applications**, Marcel dekker, Inc. New York, 1993.
- Hecht, E. **Optics**. Addison-Wesley, Reading, MA, 1990. 676 p.
- Schurcliff, W. A. **Polarized Light**, Harvard University Press, Cambridge Mass, 1962.
- Ulaby, F. and Elachi, C. **Radar Polarimetry for Geoscience Applications**, Artech House, 1990. 364 p.