artigo anterior

Anais XIII Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto, Florianópolis, Brasil, 21-26 abril 2007, INPE, p. 6243-6246.

Conjuntos fractais

Cleves Mesquita Vaz

Universidade Federal de Goiás – UFG
Campus de Catalão – CaC - Dept. de Matemática
Av. Dr. Lamartine P. de Avelar, n° 1120 - CEP 75000-000 - Catalão, GO, Brasil
mesquitav@mecanica.ufu.br

Abstract. In this work we will go to present a summary of the theory of the fractais. Here it will be looked to show the definition of fractais, what they represent in the nature, research developed for Julia's set and Mandelbrot's set, important discoveries and possible applications.

Palavras-chave: teoria do caos, fractais, conjuntos de Julia, conjuntos de Mandelbrot.

1. Introdução

É praticamente impossível determinar quem introduziu o estudo da moderna Teoria do Caos, no mundo das Ciências. Grandes nomes como Arquimedes, Galileu, Kepler, Newton, Cantor, Einstein, Feynman, (entre muitos outros), cada um à sua época (e cada um com as ferramentas matemáticas disponíveis de então) contribuíram para o amadurecimento do estudo dos Sistemas Dinâmicos lineares e não-lineares.

No entanto, May (1974) Li e Yorke (1975) são considerados como os primeiros cientistas a usarem termos como: caos, atratores estranhos, sensibilidade às condições iniciais, órbitas periódicas e fractais, etc. E conseqüentemente são referências para pesquisadores de áreas distintas, como biologia, física, engenharia, geografia, matemática, entre outras, que se deparam com fenômenos não-lineares em seus objetos de estudo.

Graficamente, a Teoria do Caos pode ser representada por uma geometria belíssima (e não usual, diferente da Geometria Euclidiana) chamada de Geometria Fractal. Na verdade, de acordo com Secco et al (2004), em decorrência da existência de comportamentos na natureza que fogem da geometria usual por nós conhecida, fez se necessário a criação de um ramo novo na matemática, que expressasse formas amórficas, como a modelagem de uma nuvem ou a representação do litoral de uma determinada. Assim, coube a Benoit B. Mandelbrot apresentar um estudo sobre essas formas diferentes, que deu origem a teoria dos fractais.

2. Fractais

Os fractais são normalmente associados à figuras irregulares. No entanto, as aplicações em várias áreas das ciências, como análise de sinais, biomedicina, refinamento de imagens têm mudado esse quadro.

A geometria dos fractais é relativamente recente, mas as teorias de equações diferenciais não-lineares e de conjuntos de dimensões fractais possuem mais de um século (Mandelbrot, 1983).

3. Conjuntos de Julia

Um conjunto de Julia é um conjunto de pontos, gerados pela iteração de uma função complexa do tipo $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, onde $\mathbb{C}$ representa o conjunto dos números complexos. Na verdade, o correto seria conjuntos de Fatou-Julia, pois foram os dois matemáticos franceses Pierre Fatou e Gaston Julia que introduziram os métodos iterativos no estudo de sistemas dinâmicos para a implementação da geometria fractal.

Consideremos uma função polinomial complexa f e um número complexo w, tal que $f(w) = w$; diremos que w é um *ponto fixo* do sistema. No entanto, se $f^{(p)}(w) = w$, para algum $p \geq 1$, dizemos que *w* é um *ponto periódico* de período *p*.

Os pontos periódicos se classificam, segundo a expressão: $\lambda = \left|(f^{(p)})'(w)\right|$, onde o índice $(')$ define a derivada de *f*:

- Se $\lambda > 1$, *w* é um *ponto repulsor*;
- Se $\lambda = 1$, *w* é um *ponto indiferente*;
- Se $0 < \lambda < 1$, *w* é um *ponto atrator*;
- Se $\lambda = 0$, *w* é um *ponto superatrator*.

Assim, podemos definir o *conjunto de Julia* de *f* por:

$$J(f) = cl\left\{w \in \mathbb{C} / w \text{ é um ponto periódico repulsor}\right\},$$

onde *cl* indica o *fecho* do conjunto dos pontos *w*. (Definimos fecho de um conjunto *A* como sendo o menor conjunto fechado que contém *A*). Alguns exemplos do conjunto de Julia pode ser visto na **Figura 1**:

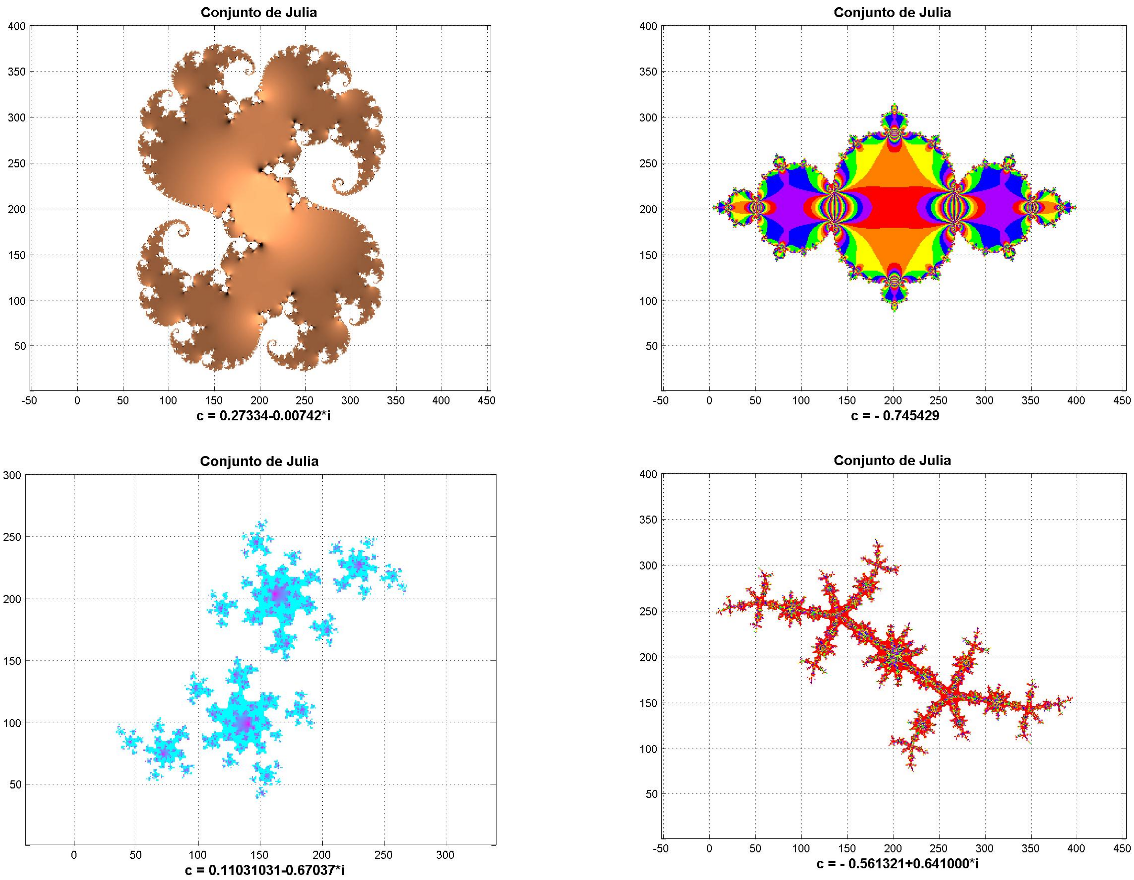

Figura 1 – Conjunto de Julia para alguns valores de *c*.

4. Conjuntos de Mandelbrot

Para definir um conjunto de Mandelbrot, inicialmente precisamos de uma classes especial de polinômios, os quais chamaremos de $f_c(w) = w^p + c$, onde c é uma constante complexa e p é uma potência real. Tais polinômios são chamados de *polinômios de Julia* e representados da seguinte forma: $J_c = J\left(f_c\right)$. Assim podemos definir o *conjunto de Mandelbrot* por:

$$M = \left\{c \in \mathbb{C} / J_c \text{ é um conjunto conexo}\right\};$$

Podemos definir um *conjunto conexo* como aquele que pode ser dividido em partes disjuntas. Exemplos do conjunto de Mandelbrot podem ser vistos na **Figura 2**, à seguir:

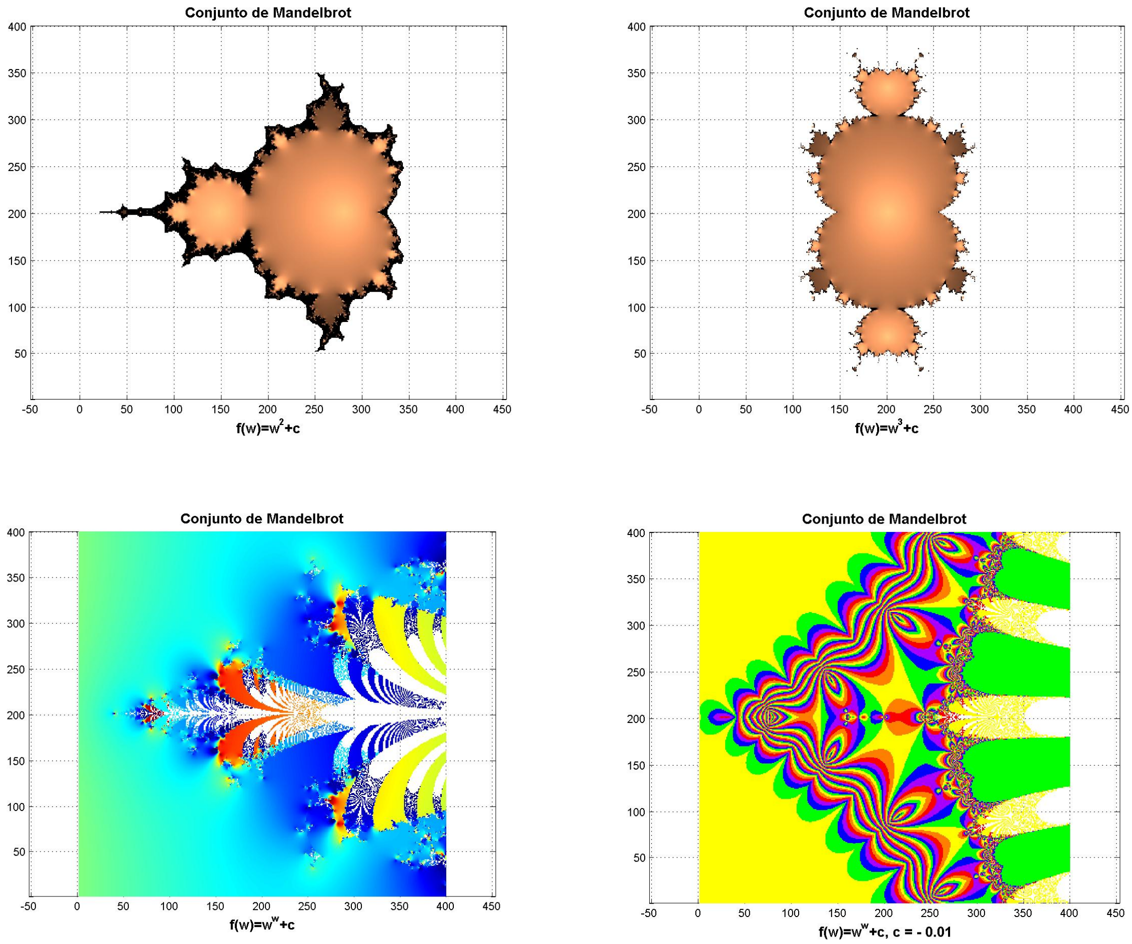

Figura 2 – Conjunto de Mandelbrot para algumas funções $f(w)$.

5. Comentários Finais

A principal motivação deste trabalho é a divulgação das idéias básicas contidas na matemática simples, mas com grandes aplicabilidade da Teoria de Fractais. Buscou-se, de maneira sucinta, discorrer sobre os conjuntos de Julia e de Mandelbrot, exemplificando cada tipo com implementações numéricas efetuadas no ambiente Matlab®.

Sugestões para leituras complementares são indicadas nas referências bibliográficas.

Referências Bibliográficas

Beardon, A. F. **Iteration of Rational Function.** GTM, vol. 32 – Springer Verlag. 1991.

Falconer, K. **Fractal Geomtry: Mathematical Foundations and Applications.** 1990.

Li, T. Y.; Yorke, J. **Period Three Implies Chaos.** Maryland University – 1975.

Liu, H. **A Brief History of the Concept of Chaos.** The Semantics and Philosophy of Chaos. Hunan Education Press – Changsha. 1998.

Mandelbrot, B. B. **The Fractal Geometry of Nature -** Springer Verlag. 1983.

May, R. R. **Biological populations with non-overlapping generations: stable point, stable cycles and chaos.** Science Magazine. 1974.

Secco, F. R; Rocha, T. T.; Barreto, J. **Fractais**. Publicação interna do curso de Ciências da Computação – Universidade Federal de Santa Catarina - 2004.