Anais XII Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto, Goiânia, Brasil, 16-21 abril 2005, INPE, p. 4103-4110.

Revisão do Modelo de Geometria Fractal

Paulo Ricardo Laux [1]
Rudiney Soares Pereira [2]

[1] Base Aérea de Santa Maria - BASM
Faixa do Camobi – Km 12– Santa Maria- RS, Brasil
lauxp@via-rs.net

[2] Universidade Federal de Santa Maria - UFSM/CCR
Faixa do Camobi – Km 9 - 97105-900 - Santa Maria- RS, Brasil
rudiney@smail.ufsm.br

Abstract. This paper deals with a revision of the fractal geometry.

Palavras-chave: pattern recognition**,** remote sensing, image processing, fractal geometry, reconhecimento de padrão, sensoriamento remoto, processamento de imagens, geometria fractal.

1. Introdução

Na área de processamento de imagens o reconhecimento de padrões tem sido usado em diversas aplicações, desde auxílio na classificação de feições em aplicações de sensoriamento remoto até discriminação de objetos em automação industrial.

As principais ferramentas para descrição de padrões são pautadas em conceitos geométricos e algébricos fundamentados há séculos, desde Euclides e Pitágoras.

Recentemente (década de 70), trabalhos com base em fractais têm proposto incrementos na descrição dos padrões da natureza. Contudo, tais estudos ainda apresentam uma problemática intrínseca a estimativa da dimensão fractal, apresentando imprecisões conforme Russ (1996).

Benoit Mandelbrot em seus primeiros trabalhos já apontava algumas distinções entre fractais auto-similares e auto-afins. Ambos com base em conceitos de invariância de padrão após rotação e translação em diferentes escalas, mantendo características similares entre as partes e o todo.

O presente estudo visa propor um modelo que respeite regras básicas de sistemas dinâmicos de forma a permitir novos estudos na área de reconhecimento de padrões.

2. Revisão da Literatura

Das diferentes ferramentas matemáticas usadas no reconhecimento de padrões duas se destacam: a estatística e a geometria. Esta se pauta em conceitos euclidianos básicos. Faz-se a seguir resumo retirado de Garding (1997) sobre algumas das principais idéias de alguns matemáticos que influenciaram significativamente a ciência.

Em 1830, Bolyai e Lobatchevski, construíram um chamado plano não-euclidiano que difere do euclidiano apenas no axioma das paralelas. Poincaré (1880) ilustrou essa descoberta desenhando um mapa na forma de um disco circular, onde as retas são arcos de circunferências que interceptam as bordas com ângulo reto. Nesse mapa valem todas as relações de transformações congruentes do plano euclidiano, menos o quinto postulado, das retas paralelas. O ponto notável desse mapa é que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor do que dois ângulos retos. Além disso, a área esta diretamente relacionada com a diferença entre essa soma e a euclidiana (180): quanto menor a diferença, maior a área.

Evariste Galois (1844) propôs três teoremas:

"I - As permutações comuns a dois grupos formam um grupo. II - Quando um grupo está contido noutro, este é a união de um certo numero de grupos semelhantes ao primeiro, que se chama divisor. III - Se o numero de permutações de um grupo é divisível por *p* (um número primo), este grupo contém uma substituição cujo período tem *p* termos".

Riemann (1854) propôs uma maneira de medir distancias com métricas ou elementos de arco. Tal metodologia permite a definição de entidades que medem a curvatura mesmo sem uma métrica definida, exigindo apenas simetria que é alcançada com matrizes.

Felix Klein (1872) realizou um programa chamado *Erlagen*. A seguir transcreve-se um problema proposto, que pode ser considerado uma generalização da geometria: "Sejam uma variedade e um grupo de transformações da variedade nela mesma. Pede-se que sejam investigadas aquelas configurações que são invariantes sob a ação das transformações pertencentes ao grupo".

Hausdorff (1914) definiu espaços topológicos como sendo um conjunto *E* equipado com uma classe de seus subconjuntos chamados abertos. Os requisitos mínimos para essa classe são:

(i) toda união de conjuntos abertos é aberta.

(ii) as intersecções finitas de conjuntos abertos são abertas.

Além disso, o próprio conjunto *E* e o conjunto vazio são abertos, e muitas vezes se exige que,

(iii) a intersecção de todos os abertos que contêm um mesmo ponto é o próprio ponto.

Garding (1997) define a topologia como a teoria dos espaços topológicos e das aplicações contínuas entre eles. Estudam-se as relações homeomorfas, isto é, as bijeções entre espaços topológicos contínuos nos dois sentidos. Conforme o teorema 3 acima dois intervalos do eixo real são homeomorfos se e só se contêm o mesmo número de extremidades: uma, duas, ou nenhuma.

Por outro lado, temos a análise funcional que trabalha com o conceito de cálculo infinitesimal, com o estudo das relações entre grupos tratadas como funções: diferenciais (relacionadas à taxa de variações – "fluxões", segundo Newton) e integrais, além das series e suas relações, principalmente de convergência. Essas têm como relações fundamentais às trigonométricas, logarítmica e sua inversa (exponencial). Ressalta-se que um dos principais desenvolvimentos nesta área diz respeito à Geometria Diferencial dando suporte a grandes avanços da física. Observa-se que as funções citadas podem ser aproximadas por séries convergentes. Além disso, toda função contínua de período 2π pode ser aproximada uniformemente por polinômios trigonométricos.

A física matemática pauta-se na possibilidade de integração e diferenciação de funções no plano complexo. Ressalta-se que uma das principais ferramentas utilizadas é a transformada de Fourier. Assim, tem-se a possibilidade de aproximar relações de um espaço aberto transformando-as em modular como é o caso das funções harmônicas. Outra base da matemática reside no aspecto de que toda integral pode ser considerada como o limite das somas de Riemann, possibilitando o uso de funções contínuas para aproximar dados discretos. Toda função tem um equivalente de combinações lineares de oscilações simples de amplitudes variadas. Garding (1997) explica a filosofia por traz disso: "todo processo temporal é uma combinação linear de oscilações simples".

3. Cálculo de dimensão fractal

Mandelbrot (1991) propõe que para a definição de dimensão fractal generaliza-se a medida do tamanho. Uma função teste $h(r)=y.r^d$ é utilizada para cobrir-se o conjunto *s* para formar uma medida $M(d) = \Sigma h(r)$. "*y*" é um fator geométrico. Geralmente a medida *Md* é ou zero ou infinito à medida que $r \to 0$ dependendo da escolha de *d*. A dimensão de Hausdorff-Besicovich D_H do conjunto *s* é o valor crítico de *d* para o qual *Md* muda de zero para infinito:

$$Md = \sum y.r^d = y.N(r)r^d \xrightarrow{r \to 0} \begin{cases} 0, & \mathrm{d} \rangle \mathrm{D_H} \\ \propto, & \mathrm{d} \langle \mathrm{D_H} \end{cases} \qquad (1)$$

Esse conceito pode, igualmente, ser observado na "curva de KOCH":

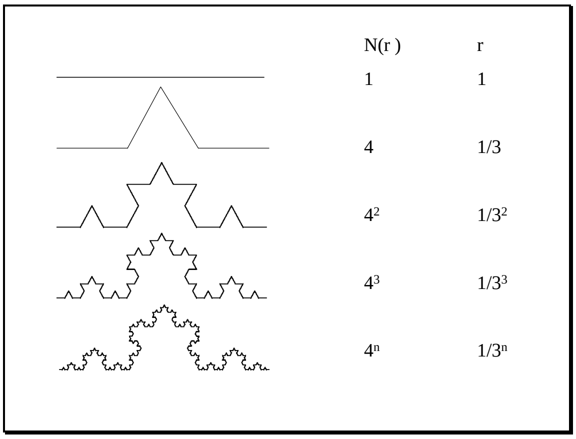

FIGURA 06 – Curva de KOCH.

$$Md = \sum r^d = N(r).r^d = 4^n.3^{-nd} = \frac{4^n}{3^{nd}} = \frac{3^{n(\log 4/\log 3)}}{3^{nd}} \qquad (2)$$

A medida *Md* permanece finita e igual a 1 se e somente se d=log4/log3. Este valor crítico é a dimensão de HAUSDORFF-BESICOVITCH D_H = 1.26.

Cada estágio da construção é uma linha. No limite $n \to \infty$ há também uma linha com infinito comprimento. Então sua dimensão topológica é D_T =1. Desde que D_H =1,26 excede a D_T =1, a curva de Koch é um fractal por definição.

A análise dos padrões de nuvens foi precursora na geometria fractal. Descreve-se a seguir um dos caminhos tomados para o cálculo de dimensão fractal e seus resultados.

O termo "Slit island coastlines" introduzido por MANDELBROT (1984), refere-se a cortes feitos em superfícies (ou segmentação em imagens com diferentes níveis de cinza) que produzem costas de modo análogo ao que ocorre com a superfície do mar em ilhas. Sendo curvas no plano, são mais fáceis de investigar do que as próprias superfícies.

Quando as ilhas são derivadas de uma superfície fractal de dimensão *D* por meio de um corte de um plano, seus limites são de dimensão fractal *D*= *D* - 1. Então, o incremento de dimensão fractal *D*-2 e *D*-1 são iguais. Esse incremento pode ser medido de diferentes modos. Mandelbrot (1984) sugere a relação A x P: "A teoria dos fractais sugere que as áreas e perímetros das *ilhas* devem ser medidas do mesmo modo, e que devemos traçar o gráfico do *log (perim.) x log (área).* Em um fractal, este gráfico é retilíneo com inclinação *D* ".

LOVEJOY (1982) calculou *D* de nuvens seguindo a teoria de MANDELBROT, onde:

$$\mathrm{P} \approx c\sqrt{A^D} \qquad (3)$$

Sendo, D a dimensão fractal do perímetro e c = um fator geométrico relacionado a forma da figura. Por exemplo, *c=4* para um quadrado, $2(\pi)^{1/2}$ para uma circunferência e $6/3^{\;1/4}$ para um triângulo eqüilátero.

A relação A x P mostra a complexidade ou o grau de meandro do perímetro.

LOVEJOY explica: “num comprimento fixo, suaves perímetros podem englobar uma área maior do que um contorcido (...). Para suaves contornos, como círculos e quadrados $P \approx \sqrt{A} \therefore D = 1$, dimensão de uma linha. Quando o perímetro começa se contorcer e tende a dobrar-se sobre si, preenchendo o plano, $P \approx A \therefore D$ aproxima-se do valor 2”.

Para radiância de nuvens a relação área x perímetro dá quase sempre expoentes constantes tipicamente no intervalo $1{,}3 \leq \xi_T \leq 1{,}6$, sendo que ambos $D(P_T)$ e $D(S_{\geq T})$ decrescem lentamente com o aumento de T, e aqui a razão $D(P_T) / D(S_{\geq T})$ pode ser esperada permanecer relativamente fixa.

RYS & WALDVOGEL (1986) estudaram a forma fractal de nuvens com granizo. Estas nuvens convectivas intensas foram observadas usando radar. O resultado do ajuste linear, da relação área-perímetro é:

D = 1,36 ± 0,1 para $P > Po$

D = 1,0 ± 0,1 para $P < Po$

Onde, *P*=perímetro, *Po* corresponde a um valor de corte do perímetro de aproximadamente três km.

O principal aspecto a ser observado nos resultados obtidos relaciona-se a larga faixa de dimensões possíveis para diferentes fenômenos naturais. Além disso, a medida da dimensão fractal pauta-se nos seguintes aspectos cruciais:

1) capacidade limitada de medição e discriminação de grupos e subgrupos, considerando nossa incapacidade de mapeamento de tais superfícies de forma 1-1;

2) truncamento e extrapolação das medidas - contagem amostral de pontos em escalas apropriadas para estimativa de perímetro, área e volume; e,

3) admite-se a existência de infinitos pontos num espaço 1-D; perímetro infinito em um espaço 2-D, e de superfície infinita em um objeto imerso em um espaço 3-D.

4. Proposta de modelo para sistemas dinâmicos

Normalmente, as simulações de elementos da natureza trabalham com conceitos tradicionais de geometria euclidiana. As metodologias disponíveis para medição das dimensões de tais elementos não produzem acurácia, conforme citado acima. Isso posto, apresenta-se a principal dúvida do presente estudo: o que provoca maior imprecisão nas medições tradicionais - a construção do modelo ou a análise do mesmo?

Com base nessa questão, buscou-se uma alternativa de modelo contendo as seguintes características:

- Aberto,
- Adaptativo,
- Permita a maior troca de informações (maior área de contato no menor volume),
- Possibilite a coexistência com outros sistemas similares ou não.

Por tanto, as seguintes regras específicas devem ser respeitadas:

1) As transições ocorrem em saltos discretos como bifurcações em mapas logísticos de séries temporais.

2)As ações buscam unicamente o aumento de superfície de contato (maior possibilidade de troca de informação) ocupando o menor volume.

3) Uma bifurcação não pode impedir a troca de informação dos seus subsistemas.

4) Um sistema deve interferir o mínimo possível nos sistemas vizinhos.

O modelo partiu do desenvolvimento em séries que tem por base a relação de Euler:

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y) \qquad (4)$$

Os possíveis valores para séries trigonométricas são limitados ao intervalo [-1; 1; -i; i]. Os coeficientes possuem simetria a partir 45º, por meio de rotações. Assim sendo, associam o aumento de informação a combinações de somatórios de *senos* e *cosenos* em diferentes possibilidades de harmônicas. Tal metodologia facilitou significativamente a análise de sinais por meio de FFT (Fast Fourier Transform, do inglês, Transformadas Rápidas de Fourier). Sabe-se contudo, que tais modelos possuem limitações para análise de fenômenos naturais.

A simetria num espaço euclidiano 3-D limita-se a cinco poliedros. Assim buscou-se uma alternativa de modelo inspirada na geometria hiperbólica. Neste trabalho ilustra-se o espaço hiperbólico com o disco de Poincaré. Vale salientar que existe uma correspondência (1-1) deste com a projeção esferográfica proposta por Riemann (Berger et al., 1984). Há relação direta entre as linhas hiperbólicas e a divisão de áreas numa superfície esférica, possibilitando infinitas simetrias tanto no plano, quanto na superfície.

Na **Figura 1** ilustra-se um modelo onde as transições ocorrem respeitando uma lei de potência, onde a cada passo são criados 3^n novos grupos. Observar o contacto com o exterior de forma redundante nos múltiplos de 3.

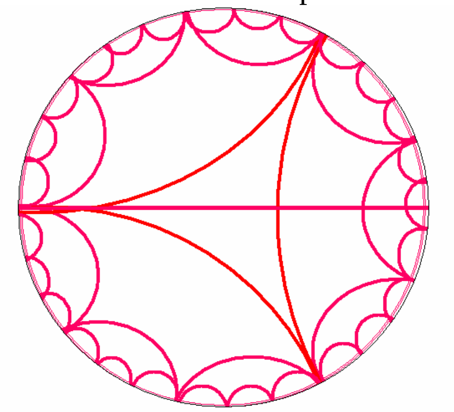

Figura 1. a) espaços preenchidos de forma exponencial.

Na **Figura 2** observa-se um modelo onde as transições ocorrem de forma semi-aleatória. Observar que não há redundância de contacto com o exterior, pois não há múltiplo.

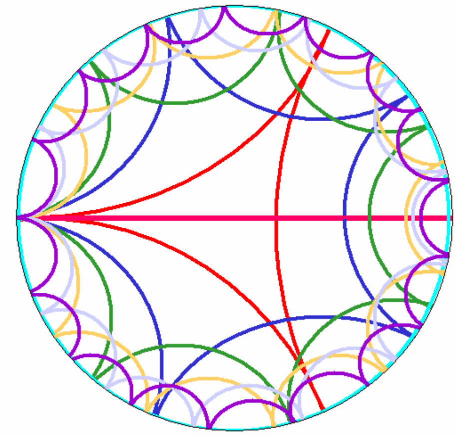

Figura 2. a) espaços preenchidos de forma semi-aleatória.

No primeiro modelo os passos de divisão do disco são tomados com números inteiros, potências de três e no segundo, com números primos. Portanto, há uma importante diferença entre ambos: o primeiro, segue regras de congruência (comuns às geometrias euclidianas ou não), onde cada subespaço comporta-se conforme premissas da geometria fractal para objetos auto-similares. Enquanto no segundo, a cada mudança de fase há acréscimo de informação.

A principal contribuição deste trabalho reside no segundo modelo. Apresenta uma nova maneira de entendimento de sistemas dinâmicos não-lineares. A teoria dos números primos tem se mostrado extremamente útil em estudos relacionados a acréscimo de informação, apresentando contribuição significativa ao presente estudo. O modelo respeita uma das principais regras da natureza: o princípio da entropia.

Na **Figura 3** vê-se a manutenção do padrão logarítmico nas diferentes escolhas de divisão do espaço no caso 2, 3, 5, 7 até a 27 potência, além da divisão dos espaços com os números primos de 2 a 67 (sem uso de multiplicidade de potência como os demais). Há significativo aumento de informação com o uso deste em relação à regra de potência. Contudo, o fator surpreendente é que a distribuição dos números primos aproxima-se da lei de potência. Este ajuste é aproximado e “aleatório”, uma vez que a cada número primo tem-se nova informação; contudo, observa-se que é convergente para 1 sem jamais alcançar tal valor.

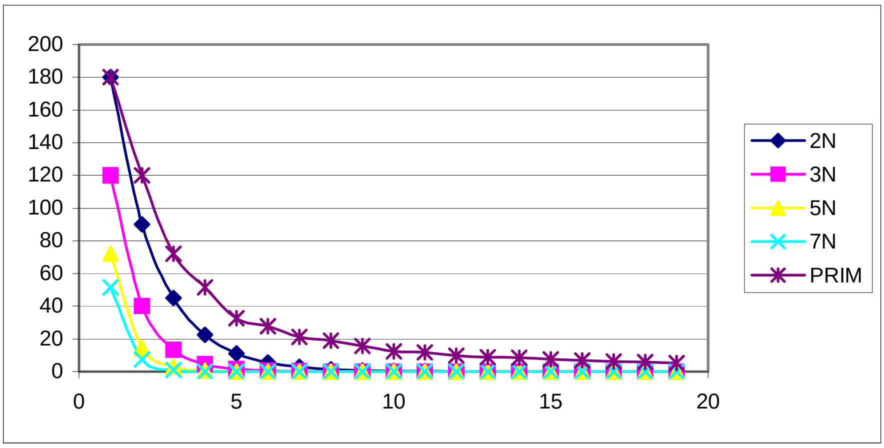

Figura 3: Divisões do plano, seguindo padrões de potência com base 2, 3, 5 e 7 e para os números primos de 2 a 67.

Na **Figura 4** observa-se que a distribuição mantém o mesmo padrão independentemente da escolha do grupo original (grupo ou sub-grupo) conforme teoremas de Galois.

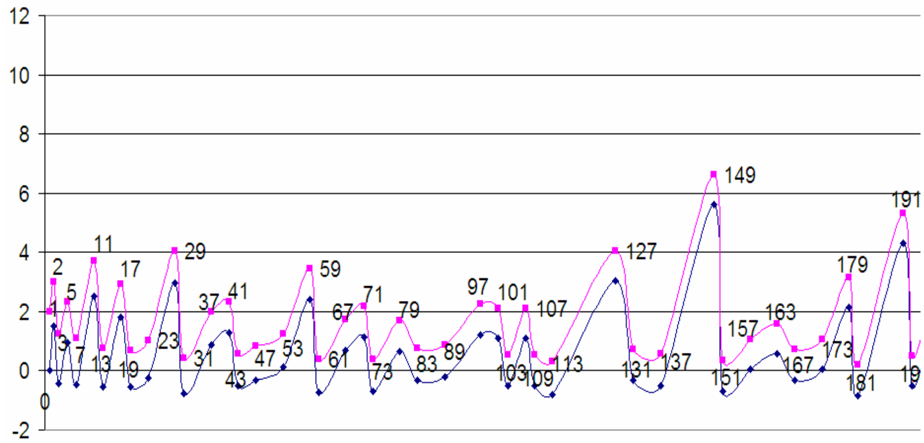

Figura 4: Divisão de todo disco (superfície esférica), vermelho e de subespaços, azul.

Analisando os resultados observa-se que o primeiro modelo comporta-se de forma determinista, sem acréscimo de informação a cada faze. Já no segundo, a cada etapa ocorre aumento de informação, sendo completamente aleatório, uma vez que qualquer número primo implica em nova informação.

Aparentemente, pode-se traçar uma comparação na qual o primeiro equivale a um estado estacionário onde as partes encontram-se em equilíbrio estático, por meio de suas harmônicas, em ressonância. Enquanto o segundo permite uma atividade dinâmica não linear.

O modelo adotado pela geometria fractal (auto-similar) trata a evolução dos sistemas de forma determinista, sem possibilidade de mudança na dinâmica dos processos envolvidos. O segundo modelo aproxima-se da teoria dos multi-fractais; contudo, apresenta indícios de que as dimensões fractais ocorrem de forma adaptativa, respeitando o princípio da entropia.

Conclui-se que caso as regras adotadas no presente trabalho correspondam à realidade dos sistemas dinâmicos naturais, há de se rever a metodologia de análise dos mesmos com base nos princípios de geometria fractal.

5. Conclusões e recomendações

Apresentou-se uma análise da geometria fractal pautada em diversas áreas da matemática e física. Estipulou-se um modelo para sistemas dinâmicos respeitando as premissas desses estudos, observando-se que a metodologia de análise fractal necessita ser revista.

Todo sistema dinâmico envolve troca de informações, a exemplo dos ciclos da atmosfera e de carbono. Acredita-se que estudos de reconhecimento de padrões fundamentados na presente análise podem sofrer incrementos significativos. Recomenda-se a inclusão de um acompanhamento temporal efetivo. A análise pautada em geometria fractal pode ficar fortemente comprometida caso não haja acompanhamento de curta e longa duração. Além disso, há necessidade de maiores estudos quanto à falta de acurácia dos métodos de cálculo de dimensão fractal. O presente trabalho contribui com a hipótese de que os modelos atuais estão incompletos.

Vale ressaltar que a hipótese do tempo ser discreto tem sido objeto de estudo da física moderna. Além disso, há estudos de que a informação é proporcional a área, conforme teoria do universo holográfico corroborando a linha de raciocínio utilizada no presente trabalho.

Apresentou-se um conceito no qual a evolução de sistemas dinâmicos ocorre de forma discreta e mantendo um equilíbrio na geração de informação. Esta ocorre de forma proporcional ao incremento de área e diminuição de volume. Além disso, considerou-se a geometria de forma dinâmica, relacional e adaptativa.

6. Referência Bibliográfica

BERGER, M.; PAUNSU,P.; BERRY,J.P.; SAINT-RAYMOND, X. **Problems in Geometry.** New York: Springer-Verlag, 1984. 264p.

GARDING, L. **Encontro com a matemática.** Brasília: UnB, 1997. 322 p.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Física 4**. 4ª ed., Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1995. 354 p.

LOVEJOY, S. **Area – perimeter relation for rain and cloud areas**. Science 216(9), P.185-187, 1982.

MANDELBROT, Benoit B. **Objectos Fractais**. Lisboa: Gradiva, 1991. 296 p.

MANDELBROT, Benoit B. **The Fractal Geometry of Nature**. Nova Iorque, 1983. 468 p.

RYS, F.S., WALDVOGEL, A **Analysis of the fractal schape of severe convective clouds,** Fractals in Physics. Holanda e Nova Yorque: L. Pietronero e E. Tosatti, p. 461-464, 1986.

RUSS, John C. **Fractal Surfaces**. Nova Iorque e Londres: Plenum Press, 1994. 309 p.

SINGER, D. A. **Geometry: plane and fancy.** Nova Iorque: Springer-Verlag, 1997. 157 p.