

VISUALIZAÇÃO DE CLASSES POR MEIO DE PARES ESTEREOSCÓPICOS

José Antonio Gonçalves Pereira
Nandamudi Lankalapalli Vijaykumar
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq
Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE
Caixa Postal 515 - 12200 - São José dos Campos - SP

RESUMO

A visualização de dados multivariados, tais como "clusters" resultantes de uma classificação, sempre apresenta problemas se o número de dimensões excede a dois. Muitas técnicas de redução de dimensionalidade, tais como principais componentes, etc., em associação com métodos de apresentação gráfica, facilitam esta visualização em duas dimensões; contudo, a introdução de uma terceira dimensão é sempre desejada. Este trabalho propõe a visão de tais classes com três dimensões, utilizando técnicas de perspectivas naturais associadas a pares estereoscópicos. Vários exemplos são mostrados, até mesmo os dados "in natura", e pré-processados pelo método de principais componentes.

ABSTRACT

The multivariate data visualization, such as clusters which result from a classification, always present a problem with the dimension number when this exceeds two. Many techniques in order to reduce the dimension number, such as principal components, etc., along with graphic presentation methods make the visualization possible in two dimensions; however, the introduction of the third dimension is always desirable. The objective of this report is to allow the viewing of these type of classes with three dimensions, using natural perspective techniques along with stereoscopic pairs. Many examples are shown, including the "in natura" data, and preprocessed using the principal components' method.

1. INTRODUÇÃO

O método das principais componentes, largamente utilizado como ferramenta auxiliar na visualização de classes, consiste essencialmente na determinação de novos eixos de coordenadas, no qual a projeção em um dos planos de referência apresenta a melhor separação entre as classes. Este trabalho propõe, para uso alternativo ou concomitante com o das principais componentes e outros, o uso de perspectiva que permite a variação do plano de projeção à vontade do pesquisador, fornecendo também uma razoável visualização de três das possíveis coordenadas. Utiliza-se a perspectiva cônica, ou natural, para que se possa, a partir de duas vistas próximas, em que a posi

ção do observador difira de cerca de sete centímetros (distância interpupilar média do ser humano), considerando um movimento normal ao raio de visada, obter pares estereoscópicos, os quais, se observados por meio de aparelhagem apropriada, familiar a qualquer foto-intérprete, permitem visão tri-dimensional.

Apresentam-se a seguir, a derivação das fórmulas de perspectiva natural, os vários exemplos bi e tri-dimensionais de visualização e, finalmente, as classes utilizadas em sua produção.

2. TRANSFORMAÇÕES DE PERSPECTIVA

A projeção plana que melhor representa objetos reais, tal como vistos a olho nu através de um meio homogêneo, é a perspectiva. Este tipo de projeção mapeia um ponto arbitrário, P , no espaço a um ponto P' em um plano π , de tal modo que todas as retas PP' encontram-se em um ponto comum C , chamado *centro de projeção*; o ponto C corresponde ao olho do observador (Figura 1).

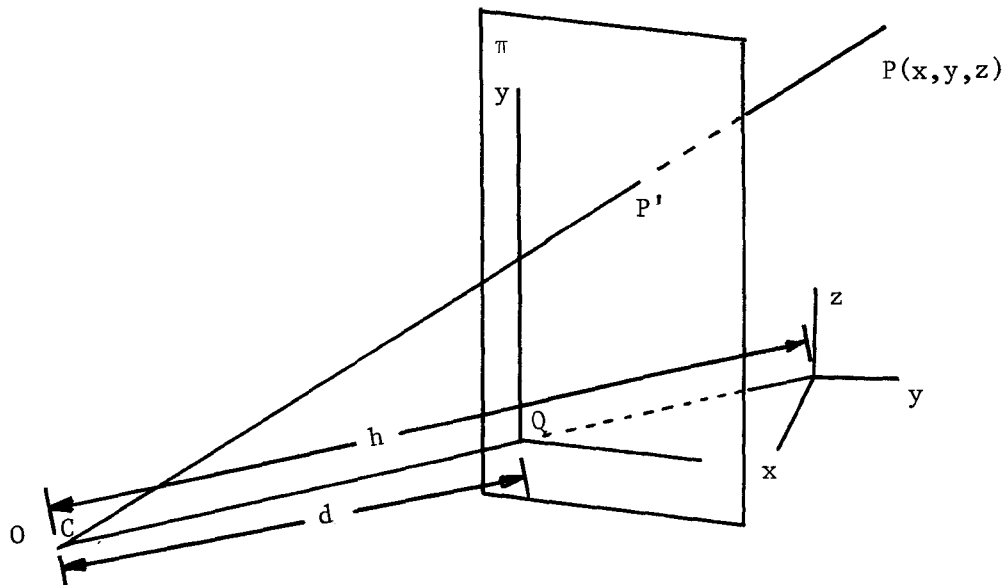


Fig. 1 - Esquema de projeção.

O plano π é chamado plano de projeção e é orientado perpendicularmente à *linha de visada* que, neste caso, para simplificação, é admitida como a linha que une o ponto C ao ponto de coordenadas $(0, 0, 0)$ do sistema de eixos coordenadas.

Seja a função a ser traçada:

$$z = f(x,y) \tag{1}$$

dada em termos de um sistema de coordenadas cartesianas (x,y,z) retangulares.

Examinem-se as Figuras 1 e 2 e suponha-se que o olho do observador no ponto C , com coordenadas C_x, C_y e C_z referentes ao mesmo sistema de coor

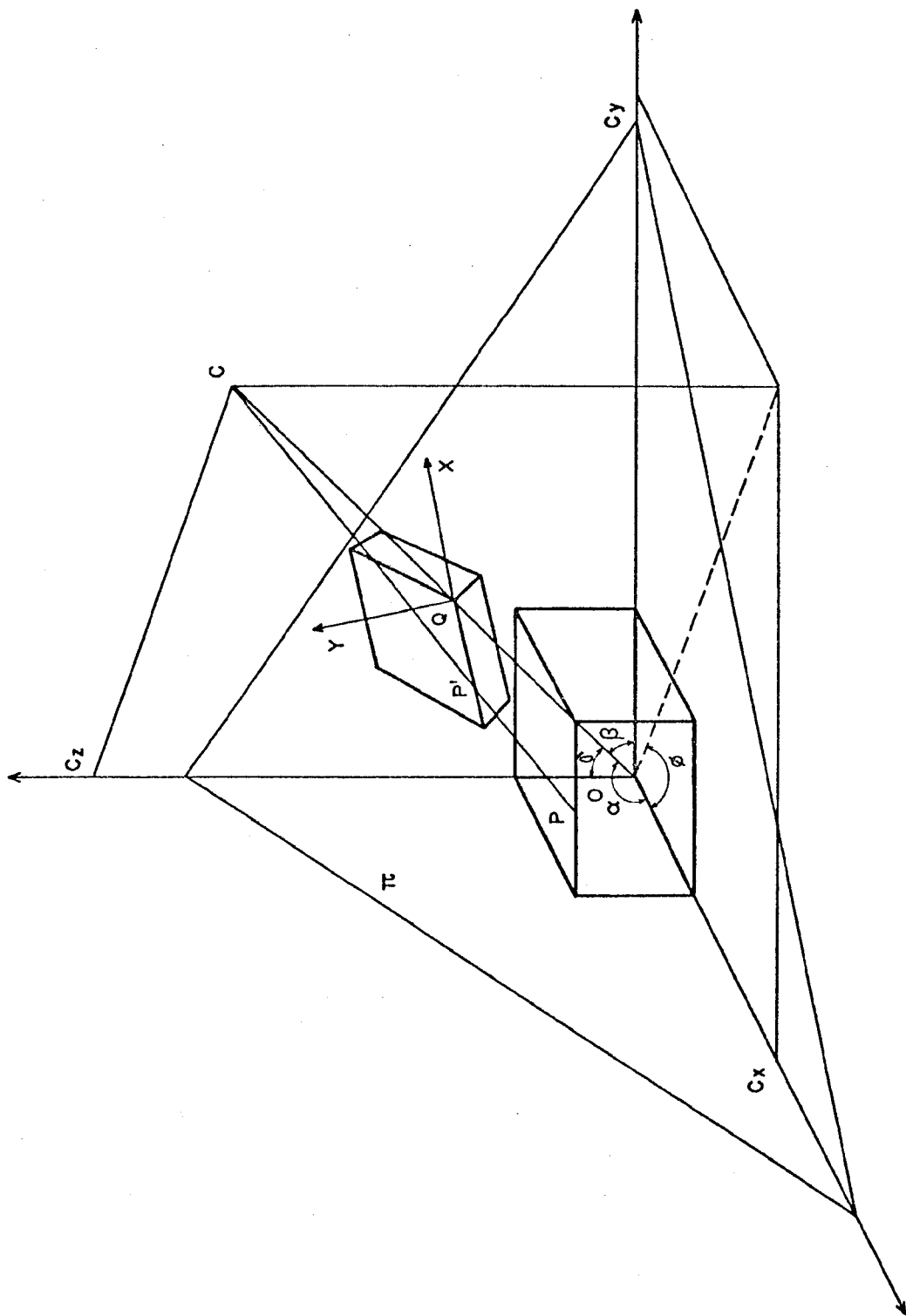


Fig. 2 - Projeção natural e seus sistemas de coordenadas.

denadas, e, ainda, que a linha de visada faça ângulos α , β e γ com a direção positiva dos eixos x , y e z , respectivamente.

Seja dada a distância d ; define-se o ponto $Q(Q_x, Q_y, Q_z)$, tal que \overline{CQ} é a direção de visada e $CQ = d$. Seja π o plano de projeção, construído sobre Q e normal a \overline{CQ} .

A linha reta que une o ponto C a um ponto arbitrário P do espaço, de coordenada (x, y, z) , encontrará o plano π em um ponto P' (ξ, η, ζ). P' é a imagem perspectiva de P em π com relação a C . Suponha-se ainda que a reta \overline{CQ} contém o ponto $(0, 0, 0)$.

Da geometria segue-se que:

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= C_x - d \cos\alpha \\ Q_y &= C_y - d \cos\beta \\ Q_z &= C_z - d \cos\gamma \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

e por semelhança de triângulos,

$$\frac{\xi - C_x}{x - C_x} = \frac{\eta - C_y}{y - C_y} = \frac{\zeta - C_z}{z - C_z} = K, \quad (3)$$

onde K é a razão comum e vazia univocamente com P .

Por definição:

$$\overline{CQ} = d (\cos\alpha \hat{i} + \cos\beta \hat{j} + \cos\gamma \hat{k}), \quad (4)$$

já que P' está no plano π e, portanto, deve satisfazer a

$$\overline{CQ} \cdot \overline{QP'} = 0, \quad (5)$$

dado que \overline{CQ} é uma das retas normais ao plano π .

Como

$$\overline{CQ} \cdot \overline{QP'} = \overline{CQ} \cdot (\overline{QC} + \overline{CP'}) = 0,$$

conclui-se que:

$$\overline{CQ} \cdot \overline{CP'} = \overline{CQ} \cdot \overline{CQ} \quad \text{ou}$$

$$(\xi - C_x) \cos\alpha + (\eta - C_y) \cos\beta + (\zeta - C_z) \cos\gamma = d \quad (6)$$

Substituindo as Equações 3 na 6, obtém-se:

$$K = \frac{d}{(x - C_x) \cos\alpha + (y - C_y) \cos\beta + (z - C_z) \cos\gamma} \quad (7)$$

que, junto com as Equações 3 define P' como

$$\left. \begin{aligned} \xi &= C_x + K(x - C_x) \\ \eta &= C_y + K(y - C_y) \\ \zeta &= C_z + K(z - C_z) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Permanece porêm o problema de expressar P' em termo das coordenadas (XY) do plano π . A equação de π (isto é, a Equação 5 pode ser escrita como:

$$(\xi - Q_x) \cos\alpha + (\eta - Q_y) \cos\beta + (\zeta - Q_z) \cos\gamma = 0 \quad (9)$$

A reta definida pela interseção do plano horizontal $\zeta - Q_z = 0$ com o plano π é:

$$\frac{\xi - Q_x}{\cos\beta} = \frac{\eta - Q_y}{-\cos\alpha} = \frac{\zeta - Q_z}{0} . \quad (10)$$

Um dos novos eixos coordenados em π (o eixo X) será definido ao longo desta reta. Um vetor unitário, na direção positiva do eixo X, em termos das coordenadas originais, é dado por:

$$\hat{U}_x = \frac{S_1[(\cos\beta)\hat{i} - (\cos\alpha)\hat{j}]}{\sin\gamma} \quad (11)$$

onde $S_1 = \pm 1$.

Para definir o outro eixo coordenado (o eixo Y), um unitário \hat{U}_y deve satisfazer a:

$$\hat{U}_x \cdot \hat{U}_y = 0, \quad (12)$$

Seja:

$$\hat{U}_y = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}; \quad (13)$$

a Equação 12 impõe que

$$a(\cos\beta) - b(\cos\alpha) = 0. \quad (14)$$

Já que \hat{U}_y está em π , este deve ser normal a \overline{CQ} .

Então,

$$a(\cos\alpha) + b(\cos\beta) + c(\cos\gamma) = 0 \quad (15)$$

e, do fato de \hat{U}_y ser unitário, tem-se

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1. \quad (16)$$

A solução simultânea das Equações 14, 15 e 16 leva à relação:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{S_2 \cos\alpha \cos\gamma}{\sin\gamma} \\ b &= \frac{S_2 \cos\beta \cos\gamma}{\sin\gamma} \\ c &= -S_2 \sin\gamma \end{aligned} \right\}, \quad (17)$$

onde $S_2 = \pm 1$.

Os sinais de S_1 e S_2 dependerão das direções de X positivo e Y positivo. Se o observador estiver orientado de tal maneira que "para cima" corresponda a uma componente crescente de z e for seguida a convenção usual (isto é X positivo para a direita e Y positivo para cima), \hat{U}_y deve ter uma componente positiva na direção z positiva.

Então:

$$\hat{U}_y \cdot \hat{k} > 0. \quad (18)$$

Mais ainda, \hat{U}_x x \hat{U}_y deve ser paralelo à linha de visada e deve apontar para o observador, donde:

$$\hat{U}_x \times \hat{U}_y = \frac{-1}{d} \cdot \overline{CQ}. \quad (19)$$

A substituição das Equações 4, 11, 12, 12 e 17 nas Relações 18 e 19 conduz a:

$$S_2 \sin\gamma < 0 \quad \text{e} \quad S_1 \cdot S_2 = -1.$$

Já que $0 < \gamma < \pi$:

$$\sin\gamma > 0,$$

$$S_1 = 1, \text{ e}$$

$$S_2 = -1.$$

Se o novo sistema tiver origem em Q, as componentes de P' em termos dos novos eixos serão:

$$(\overline{QP'} \cdot \hat{U}_x, \overline{QP'} \cdot \hat{U}_y).$$

Segue-se então que:

$$x = \frac{(\xi - Q_x) \cos\beta - (\eta - Q_y) \cos\alpha}{\sin\gamma} \quad (20)$$

$$y = \frac{(\zeta - Q_z)}{\sin\gamma}$$

Nota-se que se $\sin\gamma=0$ a transformação será singular.

Este fato, porém, não tem importância na prática, uma vez que se for necessário colocar a linha de visada na vertical, o eixo x pode ser definido como a interseção do plano π com o plano vertical $\eta - Q_y = 0$.

Como a utilização das fórmulas precedentes não é cômoda sob o ponto de vista do usuário, já que o uso mais corrente é o das chamadas coordenadas esféricas, deve-se fazer algumas modificações nas fórmulas anteriores. Sejam os ângulos θ - ângulo que \overline{OC} faz com o eixo (z) positivo ($=\gamma$), e ϕ o ângulo que a projeção de \overline{OC} no plano (xy) faz com o eixo (x) positivo. Além das Equações 2 podem-se definir as coordenadas C_x, C_y, C_z da forma (Figuras 1 e 2):

$$\begin{aligned} C_x &= h \sin\gamma \cos\phi = h \sin\theta \cos\phi, \\ C_y &= h \sin\gamma \sin\phi = h \sin\theta \sin\phi, \\ C_z &= h \cos\gamma = h \cos\theta. \end{aligned} \tag{21}$$

Mais ainda:

$$\begin{aligned} h^2 &= C_x^2 + C_y^2 + C_z^2, \\ h^2 &= h^2 (\sin^2\theta \cos^2\phi + \sin^2\theta \sin^2\phi + \cos^2\theta). \end{aligned}$$

Das Equações 21 tem-se que:

$$h^2 = h^2 (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma). \tag{22}$$

Conclui-se que não basta especificar dois dos três ângulos para ter completamente definida a direção de \overline{OC} .

Usar-se-ão, então, os ângulos θ e ϕ acima definidos, em vez de dois quaisquer dentre α, β ou γ , por ser mais simples. As transformações são:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \arccos(\cos\phi \sin\theta), \\ \beta &= \arccos(\sin\phi \sin\theta), \\ \gamma &= \arccos(\cos\theta) = \theta. \end{aligned} \right\} \tag{23}$$

As equações precedentes foram deduzidas para um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais por ser ele o mais usual. Se um particular problema exigir eixos oblíquos, a extensão será imediata, embora envolva uma grande manipulação algébrica.

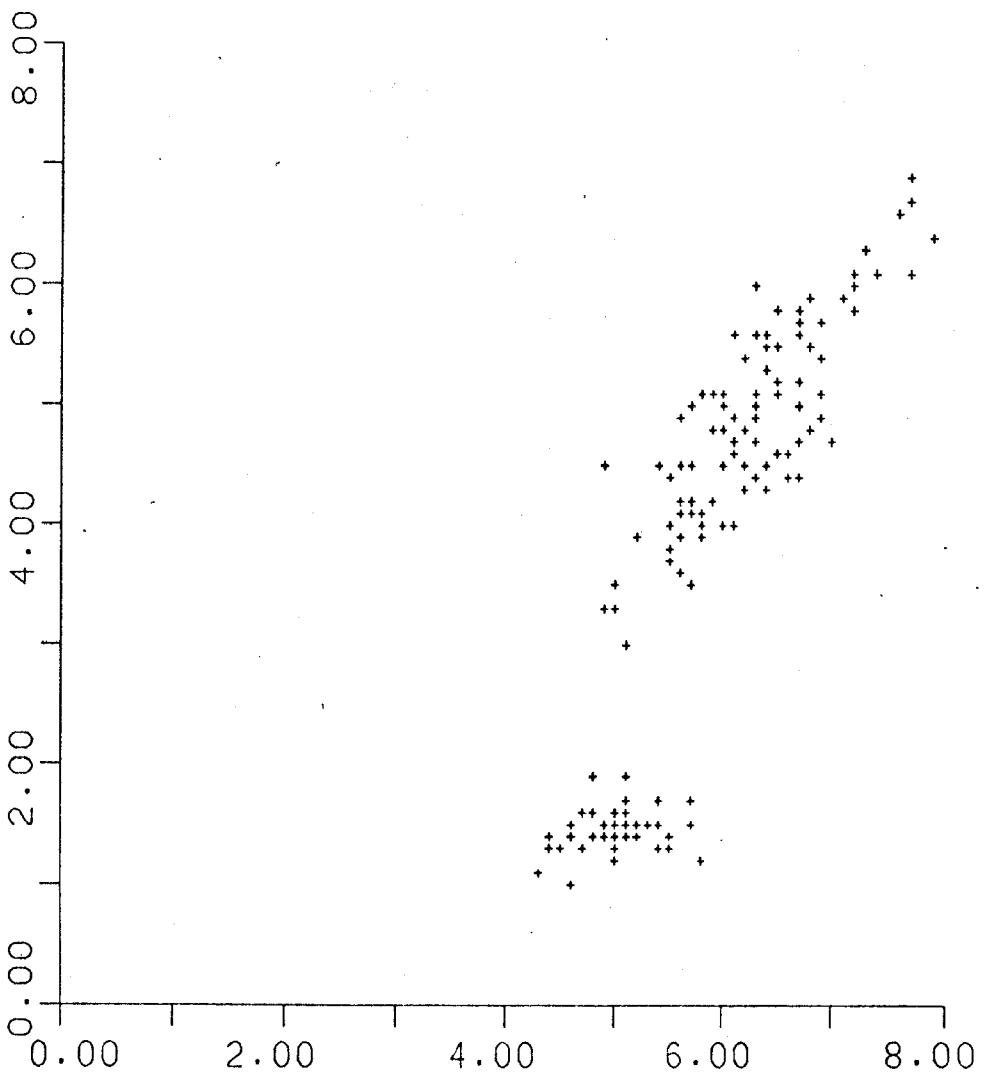
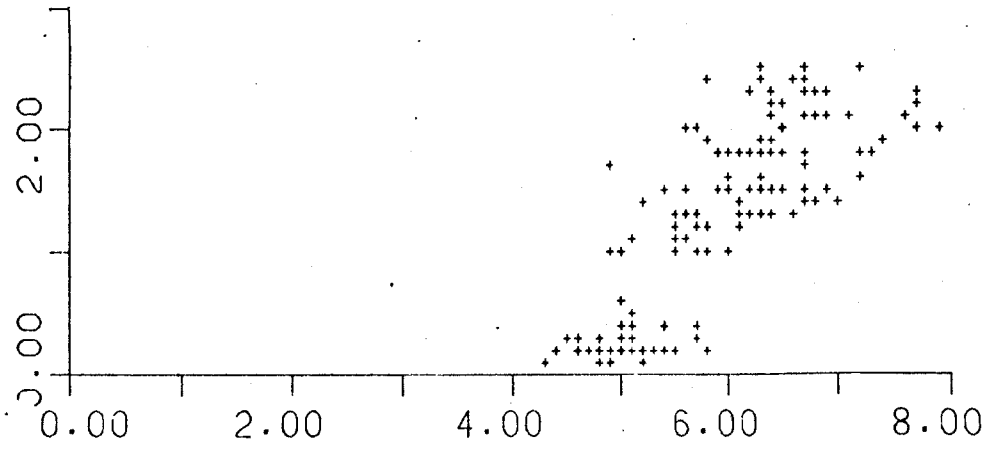
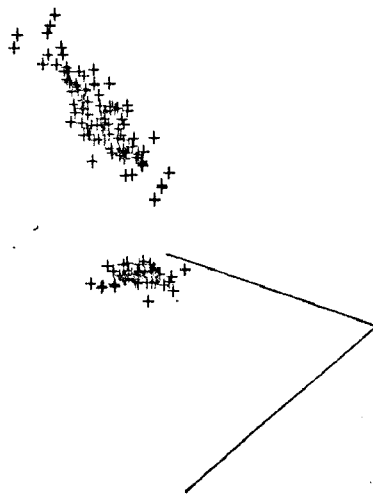
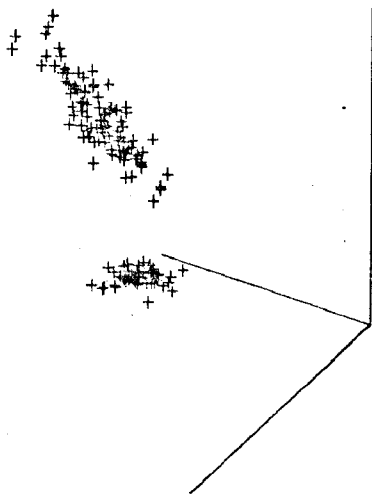
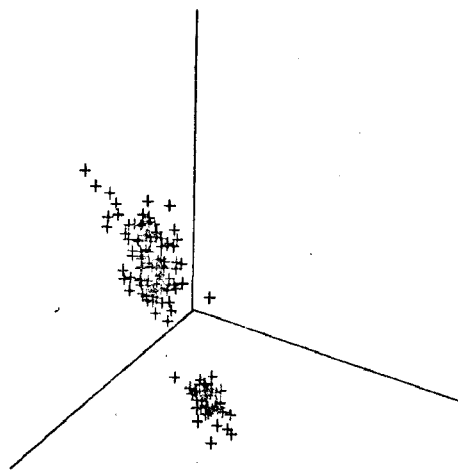
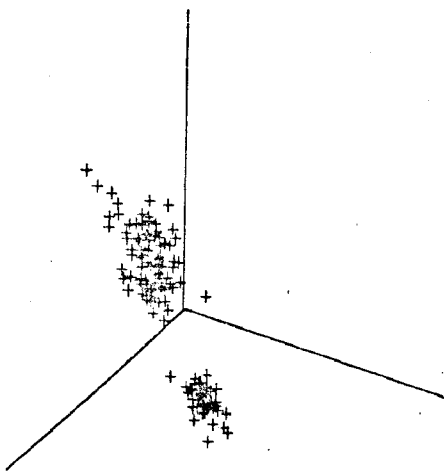


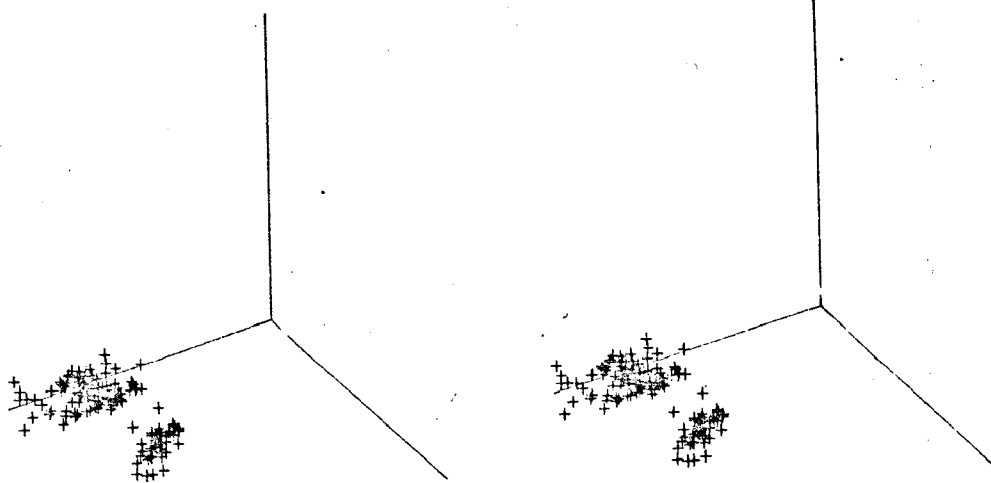
Fig. 3 - Projeções bidimensionais convencionais.



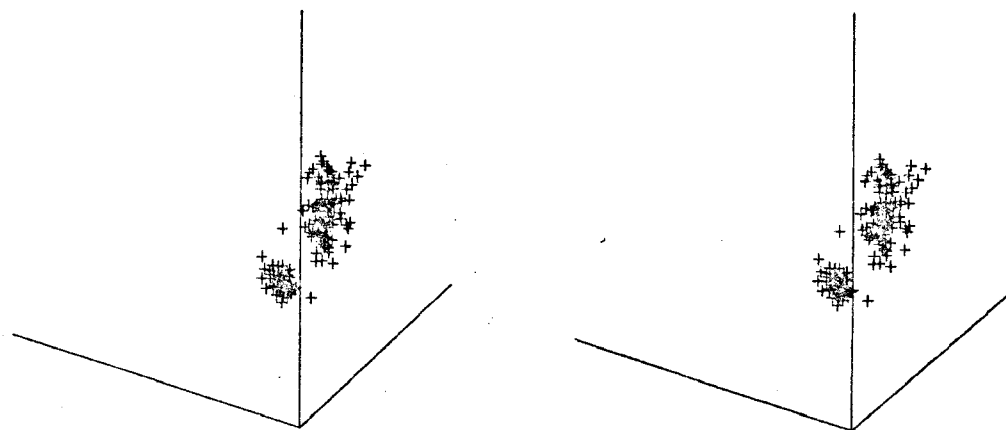
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 4 - Exemplos de pares estereoscópicos.

TABELA 1

CLASSES UTILIZADAS NO TRABALHO

IRIS SETOSA				IRIS VERSICOLOR				IRIS VIRGINICA			
SEPAL LENGTH	SEPAL WIDTH	PETAL LENGTH	PETAL WIDTH	SEPAL LENGTH	SEPAL WIDTH	PETAL LENGTH	PETAL WIDTH	SEPAL LENGTH	SEPAL WIDTH	PETAL LENGTH	PETAL WIDTH
5.1	3.5	1.4	0.2	7.0	3.2	4.7	1.4	6.3	3.3	6.0	2.5
4.9	3.0	1.4	0.2	6.4	3.2	4.5	1.5	5.8	2.7	5.1	1.9
4.7	3.2	1.3	0.2	6.9	3.1	4.9	1.5	7.1	3.0	5.9	2.1
4.6	3.1	1.5	0.2	5.5	2.3	4.0	1.3	6.3	2.9	5.6	1.8
5.0	3.6	1.4	0.2	6.5	2.8	4.6	1.5	6.5	3.0	5.8	2.2
5.4	3.9	1.7	0.4	5.7	2.8	4.5	1.3	7.6	3.0	6.6	2.1
4.6	3.4	1.4	0.3	6.3	3.3	4.7	1.6	4.9	2.5	4.5	1.7
5.0	3.4	1.5	0.2	4.9	2.4	3.3	1.0	7.3	2.9	6.3	1.8
4.4	2.9	1.4	0.2	6.6	2.9	4.6	1.3	6.7	2.5	5.8	1.8
4.9	3.1	1.5	0.1	5.2	2.7	3.9	1.4	7.2	3.6	6.1	2.5
5.4	3.7	1.5	0.2	5.0	2.0	3.5	1.0	6.5	3.2	5.1	2.0
4.8	3.4	1.6	0.2	5.9	3.0	4.2	1.5	6.4	2.7	5.3	1.9
4.8	3.0	1.4	0.1	6.0	2.2	4.0	1.0	6.8	3.0	5.5	2.1
4.3	3.0	1.1	0.1	6.1	2.9	4.7	1.4	5.7	2.5	5.0	2.0
5.8	4.0	1.2	0.2	5.6	2.9	3.6	1.3	5.8	2.8	5.1	2.4
5.7	4.4	1.5	0.4	6.7	3.1	4.4	1.4	6.4	3.2	5.3	2.3
5.4	3.9	1.3	0.4	5.6	3.0	4.5	1.5	6.5	3.0	5.5	1.8
5.1	3.5	1.4	0.3	5.8	2.7	4.1	1.0	7.7	3.8	6.7	2.2
5.7	3.8	1.7	0.3	6.2	2.2	4.5	1.5	7.7	2.6	6.9	2.3
5.1	3.8	1.5	0.3	5.6	2.5	3.9	1.1	6.0	2.2	5.0	1.5
5.4	3.4	1.7	0.2	5.9	3.2	4.8	1.8	6.9	3.2	5.7	2.3
5.1	3.7	1.5	0.4	6.1	2.8	4.0	1.3	5.6	2.8	4.9	2.0
4.6	3.6	1.0	0.2	6.3	2.5	4.9	1.5	7.7	2.8	6.7	2.0
5.1	3.3	1.7	0.5	6.1	2.8	4.7	1.2	6.3	2.7	4.9	1.8
4.8	3.4	1.9	0.2	6.4	2.9	4.3	1.3	6.7	3.3	5.7	2.1
5.0	3.0	1.6	0.2	6.6	3.0	4.4	1.4	7.2	3.2	6.0	1.8
5.0	3.4	1.6	0.4	6.8	2.8	4.8	1.4	6.2	2.8	4.8	1.8
5.2	3.5	1.5	0.2	6.7	3.0	5.0	1.7	6.1	3.0	4.9	1.8
5.2	3.4	1.4	0.2	6.0	2.9	4.5	1.5	6.4	2.8	5.6	2.1
4.7	3.2	1.6	0.2	5.7	2.6	3.5	1.0	7.2	3.0	5.8	1.6
4.8	3.1	1.6	0.2	5.5	2.4	3.8	1.1	7.4	2.8	6.1	1.9
5.4	3.4	1.5	0.4	5.5	2.4	3.7	1.0	7.9	3.8	6.4	2.0
5.2	4.1	1.5	0.1	5.8	2.7	3.9	1.2	6.4	2.8	5.6	2.2
5.5	4.2	1.4	0.2	6.0	2.7	5.1	1.6	6.3	2.8	5.1	1.5
4.9	3.1	1.5	0.2	5.4	3.0	4.5	1.5	6.1	2.6	5.6	1.4
5.0	3.2	1.2	0.2	6.0	3.4	4.5	1.6	7.7	3.0	6.1	2.3
5.5	3.5	1.3	0.2	6.7	3.1	4.7	1.5	6.3	3.4	5.6	2.4
4.9	3.6	1.4	0.1	6.3	2.3	4.4	1.3	6.4	3.1	5.5	1.8
4.4	3.0	1.3	0.2	5.6	3.0	4.1	1.3	6.0	3.0	4.8	1.8
5.1	3.4	1.5	0.2	5.5	2.5	4.0	1.3	6.9	3.1	5.4	2.1
5.0	3.5	1.3	0.3	5.5	2.6	4.4	1.2	6.7	3.1	5.6	2.4
4.5	2.3	1.3	0.3	6.1	3.0	4.6	1.4	6.9	3.1	5.1	2.3
4.4	3.2	1.3	0.2	5.8	2.6	4.0	1.2	5.8	2.7	5.1	1.9
5.0	3.5	1.6	0.6	5.0	2.3	3.3	1.0	6.8	3.2	5.9	2.3
5.1	3.8	1.9	0.4	5.6	2.7	4.2	1.3	6.7	3.3	5.7	2.5
4.8	3.0	1.4	0.3	5.7	3.0	4.2	1.2	6.7	3.0	5.2	2.3
5.1	3.8	1.6	0.2	5.7	2.9	4.2	1.3	6.3	2.5	5.0	1.9
4.6	3.2	1.4	0.2	6.2	2.9	4.3	1.3	6.5	3.0	5.2	2.0
5.3	3.7	1.5	0.2	5.1	2.5	3.0	1.1	6.2	3.4	5.4	2.3
5.0	3.3	1.4	0.2	5.7	2.8	4.1	1.3	5.9	3.0	5.1	1.8

FONTE: M.G. Kendall and A. Stuart. Advanced Theory of Statistics, vol. 3. Hafner, New York, 1966, P. 318.