A elipsometria e os parâmetros do vetor de Stokes

Nilo Sergio de Oliveira Andrade [1,2]
Antonio Nuno de Castro Santa Rosa [2]
Paulo César de Carvalho Faria [3]

[1] Comando da Aeronáutica – Centro de Lançamento de Alcântara – CLA
Av. dos Libaneses, nº 29 – Tirirical – 65056-480 – São Luís – MA, Brasil
dop@cla.aer.mil.br

[2] Instituto de Geociências – Universidade de Brasília – UNB
Campus Universitário Darcy Ribeiro – CEP 70910-900 - Brasília – DF, Brasil
nunos@unb.br

[3] Departamento de Química – Instituto Tecnológico da Aeronáutica – ITA
Praça Mal Eduardo Gomes, 50 – Vila das Acácias – 12228-900 – S.J.Campos – SP, Brasil
carvalho@ita.br

Abstract. From the mathematical representation of the components of an electric field vector, important relations among the parameters that characterize the polarization ellipse are derived. Using these relations, the link between the Stokes vector and the polarization ellipse is established. In fact, it is proved that the Stokes vector represents the coordinates of a point P on the Poincaré sphere. Then, it is shown that points on the surface of this sphere represent the state of a fully polarized electromagnetic field. This concept is extended to points inside the sphere (partially polarized fields). The center of that sphere represents a completely unpolarized wave. In addition, one concludes that the degree of polarization is given by the distance of the point P to the center of the sphere.

Palavras-chave: remote sensing, radar polarimetry, Poincaré sphere, polarization, sensoriamento remoto, polarimetria, esfera de Poincaré, polarização.

1. Introdução

Há duas abordagens clássicas para se caracterizar, por intermédio de vetores, a polarização de uma onda eletromagnética: a do vetor de Stokes e a do vetor de Jones.

Neste trabalho, a partir dos parâmetros que caracterizam a elipse de polarização, será deduzido o vetor de Stokes. Também será introduzida a representação desse vetor por intermédio da esfera de Poincaré.

Inicialmente, serão deduzidos os parâmetros que caracterizam a elipse de polarização.

2. Relações entre os parâmetros que caracterizam a elipse de polarização

Seja o vetor campo elétrico $\vec{E}$ dado por:

$$\vec{E} = \vec{x}E_x + \vec{y}E_y \qquad (1)$$

Tendo:

$$E_x = a_x sen(\omega t - \beta z) \text{ e } E_y = a_y sen(\omega t - \beta z - \delta) \qquad (2)$$

Sem perda de generalidade, pode-se fazer $z = 0$, onde z corresponde à distância percorrida na direção do deslocamento da onda; assim:

$$E_x = a_x sen(\omega t) \text{ e } E_y = a_y sen(\omega t - \delta) \qquad (3)$$

O que conduz às seguintes equações:

$$v = a_v sen(\omega t), \text{ com } E_x \leftrightarrow v \text{ e } a_x \leftrightarrow a_v \qquad (4)$$

$$h = a_h sen(\omega t - \delta), \text{ com } E_y \leftrightarrow h \text{ e } a_y \leftrightarrow a_h \qquad (5)$$

Portanto,

$$-a_v \le v \le a_v; \; -a_h \le h \le a_h \text{ e } \frac{v}{a_v} = sen(\omega t) \qquad (6)$$

$$\frac{h}{a_h} = sen(\omega t - \delta) = sen(\omega t)\cos(\delta) - \cos(\omega t) sen(\delta) \qquad (7)$$

Multiplicando-se a última equação de (6) por $\cos(\delta)$ e, do resultado, subtraindo-se (7), obtém-se (8). Por outro lado, (9) é o resultado da multiplicação da última equação de (6) por $sen(\delta)$, ou seja,

$$\frac{v}{a_v}\cos(\delta) - \frac{h}{a_h} = \cos(\omega t) sen(\delta) \qquad (8)$$

$$\frac{v}{a_v} sen(\delta) = sen(\omega t) sen(\delta) \qquad (9)$$

Elevando-se (8) e (9) ao quadrado obtém-se (10) e (11):

$$\frac{v^2}{a_v^2}\cos^2(\delta) - \frac{2vh}{a_v a_h}\cos(\delta) + \frac{h^2}{a_h^2} = \cos^2(\omega t) sen^2(\delta) \qquad (10)$$

$$\frac{v^2}{a_v^2} sen^2(\delta) = sen^2(\omega t) sen^2(\delta) \tag{11}$$

Somando-se (10) e (11) tem-se:

$$\frac{v^2}{a_v^2} - \frac{2vh}{a_v a_h}\cos(\delta) + \frac{h^2}{a_h^2} = sen^2(\delta) \tag{12}$$

Verifica-se que a equação (12) é a de uma cônica, neste caso específico, uma elipse, a **elipse de polarização**. Esta equação na forma matricial fica:

$$\begin{pmatrix} v & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a_v^2} & \dfrac{-\cos(\delta)}{a_v a_h} \\ \dfrac{-\cos(\delta)}{a_v a_h} & \dfrac{1}{a_h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ h \end{pmatrix} = sen^2(\delta) \tag{13}$$

O determinante de (13) é:

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a_v^2} & \dfrac{-\cos(\delta)}{a_v a_h} \\ \dfrac{-\cos(\delta)}{a_v a_h} & \dfrac{1}{a_h^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_v^2 a_h^2} - \frac{\cos^2(\delta)}{a_v^2 a_h^2} = \frac{sen^2(\delta)}{a_v^2 a_h^2} \tag{14}$$

A equação da elipse na forma canônica é dada por:

$$\frac{V^2}{a^2} + \frac{H^2}{b^2} = sen^2\delta \text{, com } sen\delta \neq 0 \textbf{ ou } \begin{pmatrix} V & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ H \end{pmatrix} = sen^2\delta \tag{15}$$

Investigando, agora, as relações que existem entre as coordenadas de um ponto qualquer, P, expressas nesses dois sistemas de eixos v, h e V, H. Esses sistemas diferem entre si por uma rotação de ψ graus, conforme apresentado na **Figura 1**.

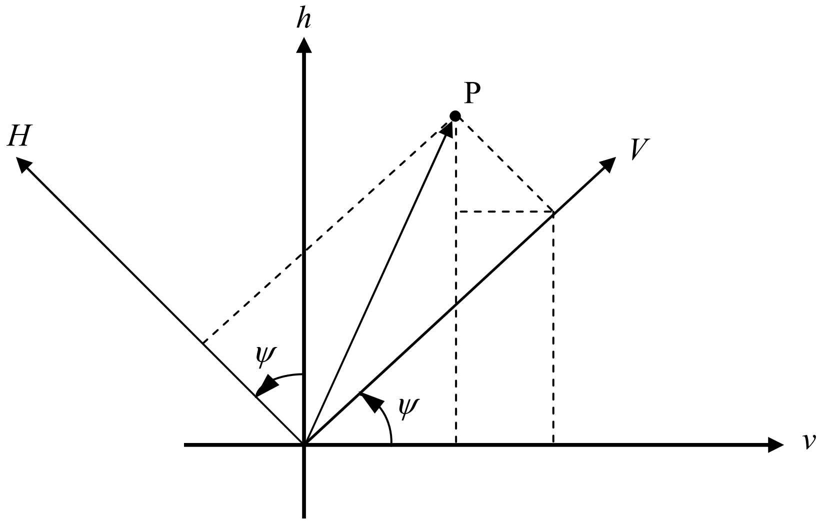

Figura 1. Coordenadas de um ponto "P" em dois sistemas de eixos v, h e V, H, defasados entre si de um ângulo de ψ graus.

Da figura anterior é fácil verificar que:

$$\begin{pmatrix} v \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -sen\psi \\ sen\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ H \end{pmatrix} \tag{16}$$

Trocando $\begin{pmatrix} v \\ h \end{pmatrix}$ por $\begin{pmatrix} V \\ H \end{pmatrix}$ e ψ por $-\psi$, chega-se a:

$$\begin{pmatrix} V \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & sen\psi \\ -sen\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ h \end{pmatrix} \tag{17}$$

Substituindo (17) na segunda equação de (15) tem-se:

$$\begin{pmatrix} v & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -sen\psi \\ sen\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & sen\psi \\ -sen\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ h \end{pmatrix} = sen^2\delta \tag{18}$$

Comparando (13) e (18), tem-se que:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a_v^2} & \frac{-\cos\delta}{a_v a_h} \\ \frac{-\cos\delta}{a_v a_h} & \frac{1}{a_h^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -sen\psi \\ sen\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & sen\psi \\ -sen\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \tag{19}$$

Logo,

$$\det\begin{pmatrix} \frac{1}{a_v^2} & \frac{-\cos\delta}{a_v a_h} \\ \frac{-\cos\delta}{a_v a_h} & \frac{1}{a_h^2} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix} = \text{ invariante sob uma rotação de eixos} \tag{20}$$

As equações (14) e (20) conduzem a:

$$\frac{sen^2(\delta)}{a_v^2 a_h^2} = \frac{1}{a^2 b^2} \therefore a^2 b^2 sen^2(\delta) = a_v^2 a_h^2 \tag{21}$$

Também, a partir de (19), chega-se a (22).

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a_v^2} & \frac{-\cos\delta}{a_v a_h} \\ \frac{-\cos\delta}{a_v a_h} & \frac{1}{a_h^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{sen^2\psi}{b^2} & \frac{sen\psi\cos\psi}{a^2} - \frac{sen\psi\cos\psi}{b^2} \\ \frac{sen\psi\cos\psi}{a^2} - \frac{sen\psi\cos\psi}{b^2} & \frac{sen^2\psi}{a^2} + \frac{\cos^2\psi}{b^2} \end{pmatrix} \tag{22}$$

Ou seja, antes da rotação dos eixos, a matriz que representava a elipse de polarização era:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix}, \text{ cujo traço é } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}. \tag{23}$$

Depois da rotação dos eixos de coordenadas, essa matriz passa a ser:

$$\begin{pmatrix} \frac{\cos^2\psi}{a^2}+\frac{sen^2\psi}{b^2} & \frac{sen\psi\cos\psi}{a^2}-\frac{sen\psi\cos\psi}{b^2} \\ \frac{sen\psi\cos\psi}{a^2}-\frac{sen\psi\cos\psi}{b^2} & \frac{sen^2\psi}{a^2}+\frac{\cos^2\psi}{b^2} \end{pmatrix}, \text{ cujo traço,} \qquad (24)$$

$$\frac{\cos^2\psi}{a^2}+\frac{sen^2\psi}{b^2}+\frac{sen^2\psi}{a^2}+\frac{\cos^2\psi}{b^2}, \text{ também é } \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}. \qquad (25)$$

Temos, assim, mais um invariante sob a rotação dos eixos: o traço das matrizes que representam a elipse de polarização. A partir dessa comprovação e de (13), decorre que:

$$\frac{1}{a_v^2}+\frac{1}{a_h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \text{ ou } \frac{a_v^2a_h^2}{a_v^2+a_h^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \qquad (26)$$

Para estabelecer o ângulo ψ, que relaciona a forma canônica da elipse de polarização com o polinômio quadrático com termo em "xy", que também representa a mesma elipse, deve-se aplicar (16) a (13), obtendo-se, então, (27):

$$\begin{pmatrix} V & H \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\psi & sen\psi \\ -sen\psi & \cos\psi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a_v^2} & \frac{-\cos(\delta)}{a_va_h} \\ \frac{-\cos(\delta)}{a_va_h} & \frac{1}{a_h^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\psi & -sen\psi \\ sen\psi & \cos\psi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V \\ H \end{pmatrix}=sen^2(\delta) \qquad (27)$$

Desenvolvendo-se esse produto matricial chega-se a:

$$\begin{pmatrix} V & H \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\cos^2\psi}{a_v^2}-\frac{sen2\psi}{a_va_h}+\frac{sen^2\psi}{a_h^2} & \frac{sen2\psi}{2}\left(\frac{1}{a_h^2}-\frac{1}{a_v^2}\right)-\frac{\cos(\delta)\cos2\psi}{a_va_h} \\ \frac{sen2\psi}{2}\left(\frac{1}{a_h^2}-\frac{1}{a_v^2}\right)-\frac{\cos(\delta)\cos2\psi}{a_va_h} & \frac{sen^2\psi}{a_v^2}+\frac{sen2\psi\cos(\delta)}{a_va_h}+\frac{\cos^2\psi}{a_h^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V \\ H \end{pmatrix}= \qquad (28)$$

$$=sen^2(\delta)$$

O termo em "V H" anula-se se:

$$\frac{1}{2}sen2\psi\left(\frac{1}{a_h^2}-\frac{1}{a_v^2}\right)-\frac{\cos(\delta)\cos2\psi}{a_va_h}=0, \text{ donde } tg2\psi=\frac{2a_va_h}{a_v^2-a_h^2}\cos(\delta) \qquad (29)$$

Onde, ψ define o ângulo de rotação do eixo principal da elipse de polarização.

Introduzindo-se o ângulo "α" (ângulo auxiliar) tal que:

$$tg\alpha=\frac{a_h}{a_v}, \qquad (30)$$

e, aplicando-se a relação trigonométrica entre $tg2\alpha$ e $tg\alpha$, tem-se que:

$$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{2\frac{a_h}{a_v}}{1-\frac{a_h^2}{a_v^2}} \therefore tg2\alpha=\frac{2a_va_h}{a_v^2-a_h^2} \qquad (31)$$

Substituindo (31) na segunda equação de (29), obtém-se:

$$tg2\psi = tg2\alpha \cos(\delta) \tag{32}$$

Seja “ χ ” tal que:

$$tg\chi = \pm \frac{b}{a} \tag{33}$$

Onde, “ χ ”está relacionado à excentricidade da elipse de polarização. Porém, da trigonometria, tem-se a seguinte relação:

$$sen2\chi = \frac{2tg\chi}{1 + tg^2\chi} \tag{34}$$

Substituindo (33) em (34), tem-se que:

$$sen2\chi = \pm \frac{2\, b/a}{1 + b^2/a^2} \therefore sen2\chi = \pm \frac{2ab}{a^2 + b^2} \tag{35}$$

Da relação apresentada em (26) e de (35), obtém-se:

$$sen2\chi = \pm \frac{2a^2b^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{1}{ab} = \left(\frac{2a_v a_h}{a_v^2 + a_h^2} \right) \left(\pm \frac{a_v a_h}{ab} \right) \tag{36}$$

De (21) tem-se que:

$$\pm \frac{a_v a_h}{ab} = sen(\delta) \tag{37}$$

Usando (37) em (36), obtém-se (38):

$$sen2\chi = \frac{2a_v a_h}{a_v^2 + a_h^2} \cdot sen(\delta) \tag{38}$$

Mais uma vez, da trigonometria, tem-se a seguinte relação:

$$sen2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 + tg^2\alpha} \tag{39}$$

(30) em (39) conduz a:

$$sen2\alpha = \frac{2\, a_h / a_v}{1 + a_h^2 / a_v^2} = \frac{2a_v a_h}{a_v^2 + a_h^2} \tag{40}$$

Aplicando, agora, (40) em (38) tem-se (41):

$$sen2\chi = sen2\alpha \cdot sen(\delta) \tag{41}$$

Assim, foram estabelecidas relações muito importantes entre os parâmetros que caracterizam a elipse de polarização: a 2ª equação de (29); (30); (32); (33); (38) e (41). Essas equações são essenciais no relacionamento do vetor de Stokes com a elipse de polarização.

3. Dedução do vetor de Stokes a partir dos parâmetros que caracterizam a elipse de polarização

Tomando I_0, a intensidade total do vetor campo elétrico, por $a_v^2 + a_h^2$, tem-se:

$$I_0 = a_v^2 + a_h^2 \tag{42}$$

Elevando (42) ao quadrado, tem-se:

$$I_0^2 = a_v^4 + 2a_v^2 a_h^2 + a_h^4 = a_v^4 - 2a_v^2 a_h^2 + a_h^4 + 4a_v^2 a_h^2 \therefore$$
$$I_0^2 = \left(a_v - a_h\right)^2 + 4a_v^2 a_h^2 \therefore 4a_v^2 a_h^2 = I_0^2 - \left(a_v - a_h\right)^2 \quad (43)$$

A partir das relações (38) e (42) obtém-se (44).

$$I_0 sen 2\chi = 2a_v a_h sen\left(\delta\right) \quad (44)$$

É fácil notar, ainda, que a relação apresentada na 2ª equação de (29) acarreta (45).

$$tg 2\psi\left(a_v^2 - a_h^2\right) = 2a_v a_h \cos\left(\delta\right) \quad (45)$$

Assim, elevando-se (44) e (45) ao quadrado e somando-se os resultados obtidos, resulta que:

$$I_0^2 sen^2 2\chi + \left(a_v^2 - a_h^2\right)^2 tg^2 2\psi = 4a_v^2 a_h^2 \quad (46)$$

Aplicando (43) em (46) obtém-se (47):

$$I_0^2 sen^2 2\chi + \left(a_v^2 - a_h^2\right)^2 tg^2 2\psi = I_0^2 - \left(a_v - a_h\right)^2 \quad (47)$$

Desenvolvendo (47) para $\left(a_v^2 - a_h^2\right)^2$ obtém-se:

$$\left(a_v^2 - a_h^2\right)^2 \left(1 + tg^2 2\psi\right) = I_0^2 \left(1 - sen^2 2\chi\right) \therefore \left(a_v^2 - a_h^2\right)^2 = I_0^2 \cos^2 2\psi \cos^2 2\chi \therefore$$
$$a_v^2 - a_h^2 = I_0 \cos 2\psi \cos 2\chi \quad (48)$$

Agora, as relações (45) e (48) acarretam:

$$2a_v a_h \cos\left(\delta\right) = \left(I_0 \cos 2\psi \cos 2\chi\right)\left(tg 2\psi\right) \therefore 2a_v a_h \cos\left(\delta\right) = I_0 sen 2\psi \cos 2\chi \quad (49)$$

Assim, define-se o Vetor de Stokes por:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} I_0 \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_v^2 + a_h^2 \\ a_v^2 - a_h^2 \\ 2a_v a_h \cos\left(\delta\right) \\ 2a_v a_h sen\left(\delta\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0 \\ I_0 \cos 2\psi \cos 2\chi \\ I_0 sen 2\psi \cos 2\chi \\ I_0 sen 2\chi \end{pmatrix} \quad (50)$$

Ou seja,

$$I_0 = a_v^2 + a_h^2; \;\; Q = I_0 \cos 2\psi \cos 2\chi; \;\; U = I_0 sen 2\psi \cos 2\chi \;\; \text{e} \;\; V = I_0 sen 2\chi \quad (51)$$

4. A esfera de Poincaré

É importante notar que os parâmetros Q, U e V nada mais são do que as coordenadas de um ponto sobre a superfície esférica de raio I_0, a esfera de Poincaré, ou seja, o estado de polarização de uma onda **completamente polarizada** é mapeado em um ponto único P na superfície daquela esfera. Portanto, a esfera de Poincaré é uma forma alternativa de representar o vetor de Stokes.

Um vetor de Stokes que correspondente a uma onda **não polarizada** é caracterizado pelos parâmetros Q, U e V todos nulos: o centro da esfera de Poincaré.

Já a **polarização parcial** é caracterizada por $I_0^2 > Q^2 + U^2 + V^2$ o que conduz a um ponto localizado no interior da esfera de Poincaré.

Pelo exposto, fica claro que o grau de polarização é dado pela distância entre o ponto “P” e o centro da esfera de Poincaré.

Q, *U* e *V* são as coordenadas cartesianas do ponto P (Ulaby and Elachi, 1990), de longitude 2ψ e de latitude 2χ. Esse ponto da esfera também pode ter sua posição definida pelos parâmetros 2α e δ, passando a ser denominado de ponto *M*.

O sinal de χ determina a orientação da polarização. Portanto, o hemisfério superior ($\chi > 0$) apresenta as polarizações orientadas para a esquerda, enquanto o hemisfério inferior ($\chi < 0$) apresenta as polarizações orientadas para a direita. O pólo norte representa as polarizações circulares para a esquerda e o pólo sul representa as polarizações circulares para a direita e, no plano do equador são encontradas as polarizações lineares horizontais e verticais.

Sabe-se da trigonometria esférica (Coutinho, 2001) que $\cos 2\alpha = \cos 2\chi \ \cos 2\psi$; $tg\left(\delta\right) = \dfrac{tg2\chi}{sen2\psi}$; $tg2\psi = tg2\alpha \ \cos\left(\delta\right)$ e $sen2\chi = sen2\alpha \ sen\left(\delta\right)$, podendo, todas essas equações, ser deduzidas da trigonometria esférica - **Figura 2**.

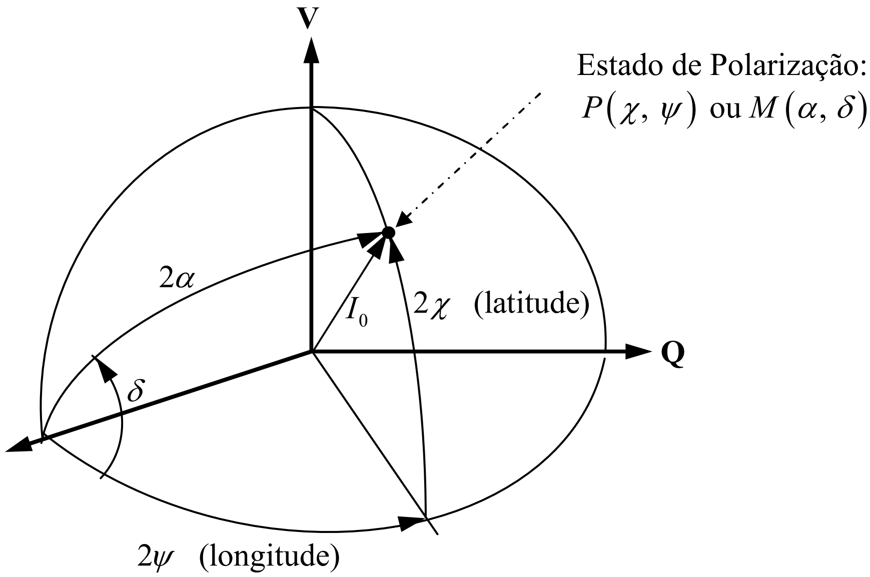

Figura 2. Coordenadas de um ponto "P" ou "*M*" na Esfera de Poincaré.

5. Conclusão

A partir das equações de definição do campo elétrico e das relações entre os parâmetros que caracterizam a elipse de polarização foi possível deduzir os parâmetros do vetor de Stokes e mostrar que o estudo da polarização também pode ser representado pela esfera de Poincaré. Vetor de Stokes e esfera de Poincaré são, portanto, representações equivalentes do mesmo fenômeno.

Referências

Andrade. N. S. O. **Radar de Abertura Sintética Polarimétrico do SIVAM – Análise e Aplicações**. Tese de Doutorado (em fase de escrita). Universidade de Brasília, Instituto de Geociências, Brasília – D.F. 2006.

Coutinho, L. **Convite às geometrias não-euclidianas**. Editora Interciência, Rio de Janeiro, 2001.

Ulaby, F. and Elachi, C. **Radar Polarimetry for Geoscience Applications**, Artech House, 1990. 364 p.