Anais XIII Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto, Florianópolis, Brasil, 21-26 abril 2007, INPE, p. 4759-4766.

As matrizes de covariância e de coerência na Polarimetria SAR

Nilo Sergio de Oliveira Andrade [1,2]
Antonio Nuno de Castro Santa Rosa [2]
Paulo César de Carvalho Faria [3]

[1] Comando da Aeronáutica – Centro de Lançamento de Alcântara – CLA
Av. dos Libaneses, nº 29 – Tirirical – 65056-480 – São Luís – MA, Brasil
dop@cla.aer.mil.br

[2] Instituto de Geociências – Universidade de Brasília – UNB
Campus Universitário Darcy Ribeiro – CEP 70910-900 - Brasília – DF, Brasil
nunos@unb.br

[3] Departamento de Química – Instituto Tecnológico da Aeronáutica – ITA
Praça Mal Eduardo Gomes, 50 – Vila das Acácias – 12228-900 – S.J.Campos – SP, Brasil
carvalho@ita.br

Abstract. Basically, the expressions for the covariance (C) and coherence (R) matrices will be derived from the vectorizing, applied to the Pauli and Borgeaud basis, of the scattering matrix (S). It will also be showed that the outer product of these vectors with themselves (vector multiplication with its conjugated transposed) yields to the (C) and (R) matrices, which fully describe the scatterer.

Palavras-chave: coherence matrix, covariance matrix, coherence vector, covariance vector, Pauli base, Borgeaud base, partially polarized wave, degree of polarization, matriz de coerência, matriz de covariância, vetor de coerência, vetor de covariância, bases de Pauli, bases de Borgeaud, ondas parcialmente polarizadas, grau de polarização.

1. Introdução

Além das matrizes de Mueller (M) e de Kennaugh (K), duas outras matrizes, conhecidas como matriz de covariância do alvo e matriz de coerência do alvo, podem ser utilizadas para a caracterização de ondas parcialmente polarizadas.

Quando o alvo em estudo apresenta um comportamento determinístico, ou seja, os espalhadores são determinísticos, esses alvos são completamente descritos por uma matriz de espalhamento (S) única ou por um vetor de espalhamento do alvo.

Para as aplicações de Sensoriamento Remoto, não é válido assumir que os espalhadores são puramente determinísticos, visto que a célula de resolução é maior do que o comprimento de onda utilizado pelo sistema, ou seja, os alvos naturais contêm muitos espalhadores determinísticos espacialmente distribuídos, sendo cada um desses espalhadores completamente e individualmente representados por uma matriz $(\mathrm{S})_i$.

Dessa forma, a matriz (S) medida para uma célula de resolução consiste de uma superposição coerente das matrizes individuais $(\mathrm{S})_i$ de todos os espalhadores localizados dentro da célula de resolução.

A fim de lidar com a estatística dos efeitos do espalhamento e com a análise dos espalhadores foi introduzido o conceito de matrizes de covariância e de coerência do espalhador (Cloude and Pottier, 1996).

2. As matrizes de Covariância e de Coerência do alvo

A matriz de espalhamento, também conhecida como matriz de Sinclair, dada por (1) pode ser expressa sob a forma vetorial de (2), também chamada de vetor de espalhamento do alvo ou **vetor de covariância do alvo**:

$$(\mathrm{S}) = \begin{pmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\vec{k}_B = \left[S_{hh} \quad S_{vh} \quad S_{hv} \quad S_{vv} \right]^T \tag{2}$$

Uma média do produto complexo entre os vetores $\vec{k}_B$ e $\vec{k}_B^{\,*T}$ leva à chamada **matriz de covariância** (C).

Embora a matriz (C) corresponda à matriz de covariância para um processo com média zero, similar ao "speckle", o termo matriz de covariância é adotado (ao invés de matriz de correlação) para o caso mais geral em que a média é diferente de zero Ulaby and Elachi (1990).

$$(\mathrm{C}) = \left\langle \vec{k}_B \cdot \vec{k}_B^{\,*T} \right\rangle \tag{3}$$

Onde o sinal $\langle \; \rangle$ indica uma média espacial do conjunto, assumindo-se que o meio espalhador é homogêneo.

A matriz (C) é Hermitiana positiva semi-definida, ou seja, seus autovalores são reais e não negativos e tem, precisamente, os mesmos elementos da matriz de Kennaugh (K) e da matriz de Mueller (M), contudo, com disposições diferentes.

A matriz de covariância contém todas as informações necessárias para lidar com um alvo, utilizando-se a convenção BSA, em inglês, *Backscatter Alignment*.

Nessa convenção os cálculos de retroespalhamento são realizados utilizando-se um sistema de coordenadas baseado na antena, ou seja, espalhamento no sentido do retroespalhamento da anda (medido na antena).

A matriz de covariância é amplamente utilizada para o retroespalhamento radar, ao invés da matriz de Kennaugh, de uso mais geral.

Para o caso em que a matriz de espalhamento é simétrica, ou seja, o teorema da reciprocidade é assumido, o vetor de covariância é dado por (4) e a matriz de covariância (C) passa a ser uma matriz 3×3.

$$\vec{k}_B = \begin{bmatrix} S_{hh} & \sqrt{2}S_{hv} & S_{vv} \end{bmatrix}^T, \tag{4}$$

onde o multiplicador $\sqrt{2}$ é introduzido para satisfazer a conservação de energia, sob uma transformação de base unitária. A explicação da transformação de base unitária pode ser verificada em Andrade, 2006.

Outra matriz que contém as mesmas informações que a matriz de Mueller é a **matriz de coerência** (R). Essa matriz foi introduzida por Cloude (1986) e utilizada na decomposição de alvos incoerentes por (Cloude and Pottier, 1996), podendo ser obtida de forma análoga à matriz de covariância.

$$(\mathrm{R}) = \left\langle \vec{k}_P \cdot \vec{k}_P^{*T} \right\rangle, \tag{5}$$

onde $\vec{k}_P$ é o vetor de espalhamento do alvo ou **vetor de coerência** (Cloude, 1986), e é dado por:

$$\vec{k}_P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} S_{hh}+S_{vv} & S_{hh}-S_{vv} & S_{hv}+S_{vh} & i\left(S_{hv}-S_{vh}\right) \end{bmatrix}^T, \tag{6}$$

Note que a equação (6) pode ser obtida a partir de:

$$\vec{k}_P = (\mathrm{A})\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}_B, \tag{7}$$

onde (A) corresponde à matriz de expansão, sendo dada por:

$$(\mathrm{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Observa-se que tanto a matriz de covariância (C) quanto a matriz de coerência (R) são deduzidas a partir de duas vetorizações da matriz de espalhamento (S), obtendo-se os vetores de covariância $\vec{k}_B$ e de coerência $\vec{k}_P$, dados por (2) e (6).

Vale notar que a matriz de covariância e a matriz de coerência são unitariamente similares (a menos de um fator de escala constante), o que pode ser comprovado por intermédio da equação (7). As duas matrizes carregam as mesmas informações, ambas são Hermitianas positivas semi-definidas e ambas têm os mesmos autovalores (que são reais), mas diferentes autovetores (Cloude and Pottier, 1996). O traço de cada uma das matrizes também é o mesmo e fornece a intensidade total da onda.

Enquanto a matriz de covariância é mais simples do que a matriz de Mueller, a matriz de coerência não apresenta tal simplicidade. Contudo, o teorema da reciprocidade permite uma considerável simplificação, uma vez que os vetores de covariância e coerência ficam reduzidos a três elementos cada um.

O uso do vetor de coerência é preferido, na literatura, porque seus elementos têm uma interpretação física (reflexão difusa, nº par de reflexões, nº ímpar de reflexões, etc).

3. Dedução das matrizes de Covariância e de Coerência

A matriz complexa (S) descreve o processo de espalhamento e contém, portanto, a informação relativa ao alvo. Ao invés da notação matricial, pode-se utilizar um vetor complexo de quatro elementos que contém a mesma informação que a matriz (S). Portanto, os vetores de covariância $\vec{k}_B$ e de coerência $\vec{k}_P$ do alvo, são definidos a partir das bases ψ_B e ψ_P, conforme apresentado a seguir:

$$(S)=\begin{pmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{pmatrix} \rightarrow \vec{k}_{B_i} = \frac{1}{2}\text{Traço}\left[(S)\psi_{B_i}\right] \therefore \vec{k}_B = \left[S_0 \quad S_1 \quad S_2 \quad S_3\right]^T \qquad (a)$$

e (9)

$$(S)=\begin{pmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{pmatrix} \rightarrow \vec{k}_{P_i} = \frac{1}{2}\text{Traço}\left[(S)\psi_{P_i}\right] \therefore \vec{k}_P = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[k_0 \quad k_1 \quad k_2 \quad k_3\right]^T \qquad (b)$$

Onde ψ_B (Base de Borgeaud) e ψ_P (Base de Pauli) são dadas por:

$$\psi_B = \left\{\psi_{B_1}, \psi_{B_2}, \psi_{B_3}, \psi_{B_4}\right\} = \left\{2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \qquad (10)$$

$$\psi_P = \left\{\psi_{P_1}, \psi_{P_2}, \psi_{P_3}, \psi_{P_4}\right\} = \left\{\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right\} \qquad (11)$$

O traço da matriz (S) é a soma dos elementos da diagonal dessa matriz.

A base de Pauli (11), formada pelas matrizes *spin* de Pauli, é amplamente empregada na física da onda espalhada.

Desenvolvendo-se a equação (a) apresentada em (9) chega-se ao vetor de covariância, conforme apresentado a seguir.

$$(S)=\begin{pmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{pmatrix} \rightarrow \vec{k}_{B_i} = \frac{1}{2}\text{Traço}\left[(S)\psi_{B_i}\right] \therefore$$

$$\begin{aligned}
&1^{\text{o}}\ \text{ elemento} = \frac{1}{2}\text{Traço}\left[\begin{pmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{pmatrix} 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\text{Traço }\ 2\begin{pmatrix} S_{hh} & 0 \\ S_{vh} & 0 \end{pmatrix} = (S_{hh}) \\
&2^{\text{o}}\ \text{ elemento} = \frac{1}{2}\text{Traço}\left[\begin{pmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{pmatrix} 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\text{Traço }\ 2\begin{pmatrix} 0 & S_{hh} \\ 0 & S_{vh} \end{pmatrix} = (S_{vh}) \\
&3^{\text{o}}\ \text{ elemento} = \frac{1}{2}\text{Traço}\left[\begin{pmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{pmatrix} 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\text{Traço }\ 2\begin{pmatrix} S_{hv} & 0 \\ S_{vv} & 0 \end{pmatrix} = (S_{hv}) \\
&4^{\text{o}}\ \text{ elemento} = \frac{1}{2}\text{Traço}\left[\begin{pmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{pmatrix} 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\text{Traço }\ 2\begin{pmatrix} 0 & S_{hv} \\ 0 & S_{vv} \end{pmatrix} = (S_{vv})
\end{aligned} \tag{12}$$

Assim, o vetor de covariância fica:

$$\vec{k}_B = \left[S_{hh} \quad S_{vh} \quad S_{hv} \quad S_{vv}\right]^T \tag{13}$$

Sendo válido o teorema da reciprocidade, passa-se a ter o vetor de covariância $\vec{k}_B$ com três elementos que simplifica consideravelmente os cálculos.

$$(S)=\begin{pmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{pmatrix} \rightarrow \vec{k}_{B_i} = \frac{1}{2}\text{Traço}\left[(S)\psi_{B_i}\right] \therefore$$

$$\begin{aligned}
&1^{\text{o}}\ \text{ elemento} = \frac{1}{2}\text{Traço}\left[\begin{pmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{hv} & S_{vv} \end{pmatrix} 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\text{Traço }\ 2\begin{pmatrix} S_{hh} & 0 \\ S_{hv} & 0 \end{pmatrix} = (S_{hh}) \\
&2^{\text{o}}\ \text{ elemento} = \frac{1}{2}\text{Traço}\left[\begin{pmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{hv} & S_{vv} \end{pmatrix} 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\text{Traço }\ 2\begin{pmatrix} 0 & S_{hh} \\ 0 & S_{hv} \end{pmatrix} = (S_{hv}) \\
&3^{\text{o}}\ \text{ elemento} = \frac{1}{2}\text{Traço}\left[\begin{pmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{hv} & S_{vv} \end{pmatrix} 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\text{Traço }\ 2\begin{pmatrix} S_{hv} & 0 \\ S_{vv} & 0 \end{pmatrix} = (S_{hv}) \\
&4^{\text{o}}\ \text{ elemento} = \frac{1}{2}\text{Traço}\left[\begin{pmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{hv} & S_{vv} \end{pmatrix} 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\text{Traço }\ 2\begin{pmatrix} 0 & S_{hv} \\ 0 & S_{vv} \end{pmatrix} = (S_{vv})
\end{aligned} \tag{14}$$

Assim, o vetor de covariância para o caso em que a reciprocidade é assumida fica:

$$\vec{k}_B = \left[S_{hh} \quad S_{hv} \quad S_{hv} \quad S_{vv}\right]^T \tag{15}$$

Contudo, para satisfazer a conservação de energia o multiplicador $\sqrt{2}$ é introduzido. Dessa forma, a equação (15) reduz-se para:

$$\vec{k}_B = \left[S_{hh} \quad \sqrt{2}S_{hv} \quad S_{vv}\right]^T \tag{16}$$

De forma similar, desenvolvendo-se a equação (b) apresentada em (9) chega-se ao vetor de coerência.

$$
\begin{aligned}
&(S)=\begin{pmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{pmatrix} \rightarrow \vec{k}_{P_i}=\frac{1}{2}\text{Traço}\left[(S)\psi_{P_i}\right]\therefore \\
&1^{\text{o}}\text{el.}=\frac{1}{2}\text{Traço}\left[\begin{pmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{pmatrix}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\text{Traço}\ \sqrt{2}\begin{pmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(S_{hh}+S_{vv}\right) \\
&2^{\text{o}}\text{el.}=\frac{1}{2}\text{Traço}\left[\begin{pmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{pmatrix}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\text{Traço}\ \sqrt{2}\begin{pmatrix} S_{hh} & -S_{hv} \\ S_{vh} & -S_{vv} \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(S_{hh}-S_{vv}\right) \\
&3^{\text{o}}\text{el.}=\frac{1}{2}\text{Traço}\left[\begin{pmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{pmatrix}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\text{Traço}\ \sqrt{2}\begin{pmatrix} S_{hv} & S_{hh} \\ S_{vv} & S_{vh} \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(S_{hv}+S_{vh}\right) \\
&4^{\text{o}}\text{el.}=\frac{1}{2}\text{Traço}\left[\begin{pmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{pmatrix}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\text{Traço}\ \sqrt{2}\begin{pmatrix} i\left(S_{hv}\right) & -i\left(S_{hh}\right) \\ i\left(S_{vv}\right) & -i\left(S_{vh}\right) \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}i\left(S_{hv}-S_{vh}\right)
\end{aligned} \tag{17}
$$

Assim, o vetor de coerência fica:

$$\vec{k}_P=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[S_{hh}+S_{vv}\quad S_{hh}-S_{vv}\quad S_{hv}+S_{vh}\quad i\left(S_{hv}-S_{vh}\right)\right]^T \tag{18}$$

Como no caso do vetor de covariância, caso o teorema da reciprocidade seja assumido, o vetor de coerência passa, também, a ter somente três elementos, conforme desenvolvido a seguir:

$$
\begin{aligned}
&(S)=\begin{pmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{vh} & S_{vv} \end{pmatrix} \rightarrow \vec{k}_{P_i}=\frac{1}{2}\text{Traço}\left[(S)\psi_{P_i}\right]\therefore \\
&1^{\text{o}}\text{el.}=\frac{1}{2}\text{Traço}\left[\begin{pmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{hv} & S_{vv} \end{pmatrix}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\text{Traço}\ \sqrt{2}\begin{pmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{hv} & S_{vv} \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(S_{hh}+S_{vv}\right) \\
&2^{\text{o}}\text{el.}=\frac{1}{2}\text{Traço}\left[\begin{pmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{hv} & S_{vv} \end{pmatrix}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\text{Traço}\ \sqrt{2}\begin{pmatrix} S_{hh} & -S_{hv} \\ S_{hv} & -S_{vv} \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(S_{hh}-S_{vv}\right) \\
&3^{\text{o}}\text{el.}=\frac{1}{2}\text{Traço}\left[\begin{pmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{hv} & S_{vv} \end{pmatrix}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\text{Traço}\ \sqrt{2}\begin{pmatrix} S_{hv} & S_{hh} \\ S_{vv} & S_{hv} \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2S_{hv}\right) \\
&4^{\text{o}}\text{el.}=\frac{1}{2}\text{Traço}\left[\begin{pmatrix} S_{hh} & S_{hv} \\ S_{hv} & S_{vv} \end{pmatrix}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\text{Traço}\ \sqrt{2}\begin{pmatrix} i\left(S_{hv}\right) & -i\left(S_{hh}\right) \\ i\left(S_{vv}\right) & -i\left(S_{hv}\right) \end{pmatrix}\therefore \\
&4^{\text{o}}\text{el.}=\frac{1}{\sqrt{2}}i\left(S_{hv}-S_{hv}\right)=0
\end{aligned} \tag{19}
$$

Tem-se, então, o seguinte vetor de coerência:

$$\vec{k}_P=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[S_{hh}+S_{vv}\quad S_{hh}-S_{vv}\quad 2\,S_{hv}\right]^T \tag{20}$$

Os fatores 2 em (10) e $\sqrt{2}$ em (11), fatores de normalização, surgem a partir da restrição de que a norma ao quadrado dos vetores de espalhamento $\vec{k}_B$ e $\vec{k}_P$ tem que ser igual à energia total retroespalhada (21), devendo, ainda, ser independente da escolha das bases ψ_B ou ψ_P.

$$\vec{k}\cdot\vec{k}=\left\|\vec{k}\right\|^2=\vec{k}_B^{*T}\cdot\vec{k}_B=\vec{k}_P^{*T}\cdot\vec{k}_P=\left(\left|S_{hh}\right|^2+\left|S_{hv}\right|^2+\left|S_{vh}\right|^2+\left|S_{vv}\right|^2\right) \tag{21}$$

Efetuando-se o produto interno de (21) chega-se aos resultados a seguir apresentados:

$$\left\|\vec{k}\right\|^2 = \vec{k}_P^{*T} \cdot \vec{k}_P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} S_{hh}^* + S_{vv}^* & S_{hh}^* - S_{vv}^* & S_{hv}^* + S_{vh}^* & -i\left(S_{hv}^* - S_{vh}^*\right) \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} S_{hh} + S_{vv} \\ S_{hh} - S_{vv} \\ S_{hv} + S_{vh} \\ i\left(S_{hv} - S_{vh}\right) \end{bmatrix}$$

assim,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(S_{hh}^* + S_{vv}^*\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(S_{hh} + S_{vv}\right) = \frac{1}{2}\left(\left|S_{hh}\right|^2 + S_{hh}^* S_{vv} + S_{hh} S_{vv}^* + \left|S_{vv}\right|^2\right); \tag{22}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(S_{hh}^* - S_{vv}^*\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(S_{hh} - S_{vv}\right) = \frac{1}{2}\left(\left|S_{hh}\right|^2 - S_{hh}^* S_{vv} - S_{hh} S_{vv}^* + \left|S_{vv}\right|^2\right);$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(S_{hv}^* + S_{vh}^*\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(S_{hv} + S_{vh}\right) = \frac{1}{2}\left(\left|S_{hv}\right|^2 + S_{hv}^* S_{vh} + S_{vh}^* S_{hv} + \left|S_{vh}\right|^2\right) \text{e}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}-i\left(S_{hv}^* - S_{vh}^*\right)\frac{1}{\sqrt{2}}i\left(S_{hv} - S_{vh}\right) = \frac{1}{2}\left(\left|S_{hv}\right|^2 - S_{hv}^* S_{vh} - S_{vh}^* S_{hv} + \left|S_{vh}\right|^2\right).$$

De forma similar,

$$\left\|\vec{k}\right\|^2 = \vec{k}_B^{*T} \cdot \vec{k}_B = \begin{bmatrix} S_{hh}^* & S_{vh}^* & S_{hv}^* & S_{vv}^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_{hh} \\ S_{vh} \\ S_{hv} \\ S_{vv} \end{bmatrix} \therefore \tag{23}$$

$$S_{hh}^* S_{hh} = \left|S_{hh}\right|^2; \quad S_{vh}^* S_{vh} = \left|S_{vh}\right|^2; \quad S_{hv}^* S_{hv} = \left|S_{hv}\right|^2 \quad \text{e} \quad S_{vv}^* S_{vv} = \left|S_{vv}\right|^2.$$

Efetuando-se a soma dos resultados apresentados tanto em (22) quanto em (23) chega-se, em ambos os casos, ao escalar apresentado em (21).

Realizando, agora, o produto do vetor $\vec{k}_P$ por seu conjugado transposto obtém-se a **matriz de coerência**, que corresponde a uma representação das propriedades de espalhamento do alvo no domínio da potência.

$$(\mathrm{R}) = \left\langle \vec{\mathrm{k}}_\mathrm{P} \cdot \vec{\mathrm{k}}_\mathrm{P}^{*\mathrm{T}} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} S_{hh} + S_{vv} \\ S_{hh} - S_{vv} \\ S_{hv} + S_{vh} \\ i\left(S_{hv} - S_{vh}\right) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(S_{hh}^* + S_{vv}^* \quad S_{hh}^* - S_{vv}^* \quad S_{hv}^* + S_{vh}^* \quad -i\left(S_{hv}^* - S_{vh}^*\right)\right) \right\rangle \therefore$$

$$(\mathrm{R}) = \left\langle \vec{\mathrm{k}}_\mathrm{P} \cdot \vec{\mathrm{k}}_\mathrm{P}^{*\mathrm{T}} \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} \left|k_0\right|^2 & k_0 k_1^* & k_0 k_2^* & k_0 k_3^* \\ k_1 k_0^* & \left|k_1\right|^2 & k_1 k_2^* & k_1 k_3^* \\ k_2 k_0^* & k_2 k_1^* & \left|k_2\right|^2 & k_2 k_3^* \\ k_3 k_0^* & k_3 k_1^* & k_3 k_2^* & \left|k_3\right|^2 \end{pmatrix} \right\rangle \tag{24}$$

Ou seja:

$$(R)=\frac{1}{2}\left\langle\begin{pmatrix} (S_{hh}+S_{vv})(S_{hh}^*+S_{vv}^*) & (S_{hh}+S_{vv})(S_{hh}^*-S_{vv}^*) & (S_{hh}+S_{vv})(S_{hv}^*+S_{vh}^*) & (S_{hh}+S_{vv})\left[-i(S_{hv}^*-S_{vh}^*)\right] \\ (S_{hh}-S_{vv})(S_{hh}^*+S_{vv}^*) & (S_{hh}-S_{vv})(S_{hh}^*-S_{vv}^*) & (S_{hh}-S_{vv})(S_{hv}^*+S_{vh}^*) & (S_{hh}-S_{vv})\left[-i(S_{hv}^*-S_{vh}^*)\right] \\ (S_{hv}+S_{vh})(S_{hh}^*+S_{vv}^*) & (S_{hv}+S_{vh})(S_{hh}^*-S_{vv}^*) & (S_{hv}+S_{vh})(S_{hv}^*+S_{vh}^*) & (S_{hv}+S_{vh})\left[-i(S_{hv}^*-S_{vh}^*)\right] \\ \left[i(S_{hv}-S_{vh})\right](S_{hh}^*+S_{vv}^*) & \left[i(S_{hv}-S_{vh})\right](S_{hh}^*-S_{vv}^*) & \left[i(S_{hv}-S_{vh})\right](S_{hv}^*+S_{vh}^*) & \left[i(S_{hv}-S_{vh})\right]\left[-i(S_{hv}^*-S_{vh}^*)\right] \end{pmatrix}\right\rangle$$

Assumindo-se o teorema da reciprocidade, o **vetor de coerência** passa a ser definido conforme apresentado em (20) e a matriz de coerência passa a ser uma matriz 3×3, a seguir apresentada:

$$(\mathrm{R})=\left\langle\vec{\mathrm{k}}_{\mathrm{P}}\cdot\vec{\mathrm{k}}_{\mathrm{P}}^{*\mathrm{T}}\right\rangle=\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} S_{hh}+S_{vv} \\ S_{hh}-S_{vv} \\ 2S_{hv}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} S_{hh}^*+S_{vv}^* & S_{hh}^*-S_{vv}^* & 2S_{hv}^*\end{pmatrix}\right\rangle\therefore$$

$$(\mathrm{R})=\left\langle\vec{\mathrm{k}}_{\mathrm{P}}\cdot\vec{\mathrm{k}}_{\mathrm{P}}^{*\mathrm{T}}\right\rangle=\frac{1}{2}\left\langle\begin{pmatrix} |k_0|^2 & k_0k_1^* & k_0k_2^* \\ k_1k_0^* & |k_1|^2 & k_1k_2^* \\ k_2k_0^* & k_2k_1^* & |k_2|^2\end{pmatrix}\right\rangle \tag{25}$$

Efetuando-se os cálculos acima, a matriz de coerência simétrica fica:

$$(\mathrm{R})=\left\langle\vec{\mathrm{k}}_{\mathrm{P}}\cdot\vec{\mathrm{k}}_{\mathrm{P}}^{*\mathrm{T}}\right\rangle=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} |S_{hh}|^2+2\,\mathrm{Re}(S_{hh}S_{vv}^*)+|S_{vv}|^2 & |S_{hh}|^2-2i\,\mathrm{Im}(S_{hh}S_{vv}^*)-|S_{vv}|^2 & 2S_{hh}S_{hv}^*+2S_{vv}S_{hv}^* \\ |S_{hh}|^2+2i\,\mathrm{Im}(S_{hh}S_{vv}^*)-|S_{vv}|^2 & |S_{hh}|^2-2\,\mathrm{Re}(S_{hh}S_{vv}^*)+|S_{vv}|^2 & 2S_{hh}S_{hv}^*-2S_{vv}S_{hv}^* \\ 2S_{hv}S_{hh}^*+2S_{hv}S_{vv}^* & 2S_{hv}S_{hh}^*-2S_{hv}S_{vv}^* & 4|S_{hv}|^2\end{bmatrix}$$

De forma similar, o produto do vetor $\vec{k}_B$ por seu conjugado transposto conduz a **matriz de covariância** (C).

4. Conclusão

Foi visto que tanto a matriz de covariância (C) quanto a matriz de coerência (R) são obtidas a partir de duas vetorizações da matriz de espalhamento (S), ou seja, os vetores de covariância $\vec{k}_B$ e de coerência $\vec{k}_P$. Comprovou-se, também, que o traço das matrizes (C) e (R) fornece a energia total da onda e que essas matrizes são obtidas pelo produto interno dos vetores $\vec{k}_B$ e $\vec{k}_P$ por seus complexos conjugados.

As matrizes obtidas apresentam características similares, a despeito do fato da reciprocidade aplicar-se ou não, sendo ambas hermitianas positivas semi-definidas com seus autovalores todos positivos.

Referências

Andrade, N. S. O. **Radar de Abertura Sintética Polarimétrico do SIVAM – Análise e Aplicações**. Tese de Doutorado (em fase de escrita). Universidade de Brasília, Instituto de Geociências, Brasília – D.F. 2006.

Cloude, S. R. Group Theory and polarization algebra. **Optik**, v. 75, n. 1, p. 26-36, 1986.

Cloude, S.R.; Pottier, E. A review of target decomposition theorems in radar polarimetry**. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing**, v. 34, n. 2, p. 498–518, 1996.

Ulaby, F.; Elachi, C. **Radar polarimetry for geoscience applications**, Artech House, 1990. 364 p.